波の重ね合わせの原理とエネルギー保存則

高校の物理でも習う「波の重ね合わせの原理」と「エネルギー保存則」が矛盾しているのではないか？と誤解する生徒が多いように思われる。

詳細は以下のようなものである。互いに等しい振幅 a を持つ二つの波が分離して存在するとき、全エネルギー E は

$$E = Ca^2 + Ca^2 = 2Ca^2$$

となる。a の比例定数を C とおいた。これら二つの波が重なり合ったときに現れる波は、重ね合わせの原理により個々の波の和で表せる。同位相で重なり合うと、振幅が $a + a = 2a$ となるので、エネルギーは

$$E = C(2a)^2 = 4Ca^2 \neq 2Ca^2$$

となる。逆位相で重なり合う場合、振幅が $a - a = 0$ となるので

$$E = C0^2 = 0 \neq 2Ca^2$$

となる。二つの波が重なる前はエネルギーが $2Ca^2$ だったのに、重なったあとはエネルギーが増えたり減ったりしているように見える。これはエネルギー保存則を破っているのではないか？と悩む生徒がいるようである。

上述のような疑問は、波のエネルギーが振幅の自乗に比例する、ということを丸暗記してしまっていることの弊害であるように思う。そこで、まずは高校の教科書に出てくる波のエネルギーの由来を復習することから始めてみる。議論を単純にするために、二つの自由な正弦進行波の干渉前後を考える。正弦波は、各媒質の単振動の集まりとみなすものであったことを思い出すと、正弦波全体が持つエネルギーは、次の各媒質の振動エネルギー $\epsilon(\boldsymbol{r})$ の和で書ける。

$$\epsilon(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2(\boldsymbol{r}) = 2\pi^2\rho f^2 a^2(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

ここで、ρ は媒質の質量密度であり、ω と f は単振動の角振動数と周波数である。干渉する前の自由正弦波は振幅が位置に依らず一定 ($a(\boldsymbol{r}) = a$) なので、エネルギー密度は位置に依らず一様に分布していることになる。しかし干渉した後の波は一般に、振幅が位置によって変わるため、それに伴いエネルギー密度の分布も一様でなくなる。このエネルギー密度（振幅）の非一様性を意識しないがあまり、エネルギー収支を考える際に、強（弱）め合う位置でのエネルギーだけに囚われてしまい、エネルギー保存則が成り立ってないと早合点することになってしまうのではなかろうか？

高校の教科書で登場するこの ϵ は、あくまで単位体積あたりの媒質が持つ「局所的な」エネルギーである。このエネルギー密度の分布が一様でない限りは、エネルギー密度だけで干渉前後のエネルギー保存則を考えるのは意味のないことである。エネルギー保存則を確かめるためには、波の存在領域全体、もしくは振動の周期的な領域においてエネルギー密度を積分して足し上げ、干渉前後で比較する必要がある。

具体例として定在波を考えてみる。定在波とは、振幅と振動数が同じであり、互いに反対向きに進行する波が合成されてできるものであった。一次元（x 方向）に互いに反対向きに進行する波 y_+ と y_- を考えよう。

$$y_+ = a\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \delta_+\right\}, \quad y_- = a\sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right) + \delta_-\right\} \tag{2}$$

干渉する前のエネルギー密度の和は、それぞれ振幅が位置に依らず一様なので

$$\epsilon_1 = \epsilon_+ + \epsilon_- = 2\pi^2\rho f^2 a^2 + 2\pi^2\rho f^2 a^2 = 4\pi^2\rho f^2 a^2 \tag{3}$$

のように単に足し上げることが許される。$\Delta_+ = (\delta_+ + \delta_-)/2$ と $\Delta_- = (\delta_+ - \delta_-)/2$ のように置き換え、合成波の式を計算すると

$$\begin{aligned} Y = y_+ + y_- &= a \sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Delta_+ + \Delta_-\right\} + a \sin\left\{2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right) + \Delta_+ - \Delta_-\right\} \\ &= a\,\mathrm{Im}\left[\exp\left\{i\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Delta_+ + \Delta_-\right)\right\} + \exp\left\{i\left(2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right) + \Delta_+ - \Delta_-\right)\right\}\right] \\ &= a\,\mathrm{Im}\left[\exp\left\{i\left(2\pi f t + \Delta_+\right)\right\} \times 2\cos\left(2\pi f\frac{x}{v} - \Delta_-\right)\right] \\ &= 2a\cos\left(2\pi f\frac{x}{v} - \Delta_-\right)\sin\left(2\pi f t + \Delta_+\right) \end{aligned}$$

となる。これより Y の振幅は

$$A(x) = \left|2a\cos\left(2\pi f\frac{x}{v} - \Delta_-\right)\right| \tag{4}$$

となる。定在波 Y の強め合う位置（つまり腹）x_m は、m を整数とし、

$$2\pi f\frac{x_m}{v} - \Delta_- = m\pi$$

で与えられる。(1) にこの振幅を代入し、定在波の一周期である区間 $[x_m, x_{m+1}]$ において積分し、$x_{m+1} - x_m$ で除すことで、この定在波全体のエネルギー密度の平均 $\bar{\epsilon}$ を求めたことになる。$\bar{\epsilon}$ を求めると

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{x_{m+1} - x_m}\int_{x_m}^{x_{m+1}} 2\pi^2\rho f^2 A^2(x)\,dx = \frac{8\pi^2\rho f^2 a^2}{x_{m+1} - x_m}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \cos^2\left(2\pi f\frac{x}{v} - \Delta_-\right)dx \\ &= \frac{8\pi^2\rho f^2 a^2}{x_{m+1} - x_m}\int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left\{2\left(2\pi f\frac{x}{v} - \Delta_-\right)\right\}\right)dx = \frac{8\pi^2\rho f^2 a^2}{x_{m+1} - x_m}\frac{1}{2}(x_{m+1} - x_m) \\ &= 4\pi^2\rho f^2 a^2 \end{aligned}$$

となり、平均のエネルギー密度は確かに干渉前の個々のエネルギー密度の和 (3) に等しい。これは、波のエネルギーの保存則を表している。