運動学

力学の目標……質点のある時刻以降の位置を予言できるようになること。

数学的には、$\vec{r} = \vec{r}(t)$ の関数形を知ること。これを時間追跡と呼ぶことにする。

- 質点とは…？

→ 大きさの~~ない~~無視できるもの。一点に物体の全質量が集まったもの、と見なす。実際に扱っている物体がどれくらい大きいのかが重要なのではなく、考えている現象に依存する。（地球の自転 → 質点 ×
地球の太陽の回りの公転 → 質点 OK）

- 速度、加速度

$$\text{速度}\quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\text{加速度}\quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \left(= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right)$$

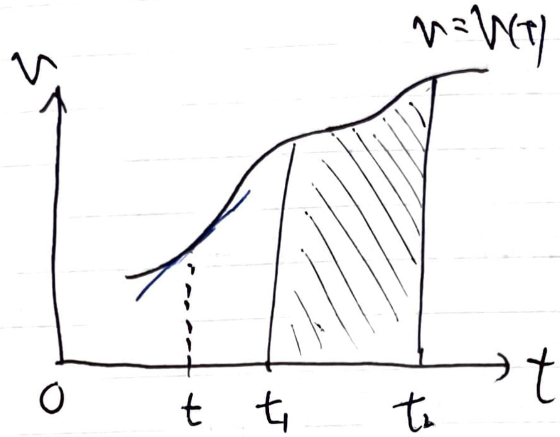
もし、加速度が決まったならば、時間による積分を繰り返すことで
速度 → 位置と求まる。

※「系の力学的状態が決まる」と言う。
経験的に、ある時刻での位置と速度を与えると定まる。

※物理の理論において、r が t に依存するとは特別な場合である。量子力学や相対論では、r と t は独立なパラメーターとして扱われる。

高校では
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
と習うが、Δ（有限）は微小でない幅をとるので、（平均の速度）でない、より一般的な速度を定義するのには不適切である。

v-t グラフ



＊接線の傾き

→ 加速度

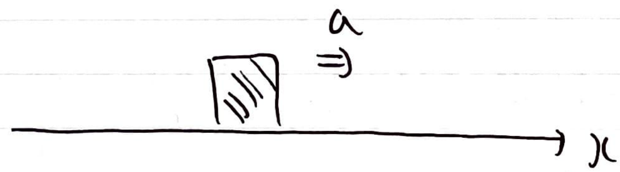
$a = \frac{dv}{dt}$ に対応

＊面積

→ 変位に対応

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx = x(t_2) - x(t_1)$$

(ex1) 一次元の等加速度運動



一定の加速度 a で x 軸上を運動する物体を考える。加速度を時間で積分すると、速度 v が求まる。

$$v = \int a\,dt = at + C_1 \quad (C_1 は積分定数)$$

$v(0) = C_1$ より、

$$v(t) = v(0) + at$$

さらに時間で積分すると、位置 x が求まる：

$$x = \int v\,dt = \int \{v(0) + at\}\,dt$$
$$= v(0)t + \frac{1}{2}at^2 + C_2$$

$x(0) = C_2$ より、

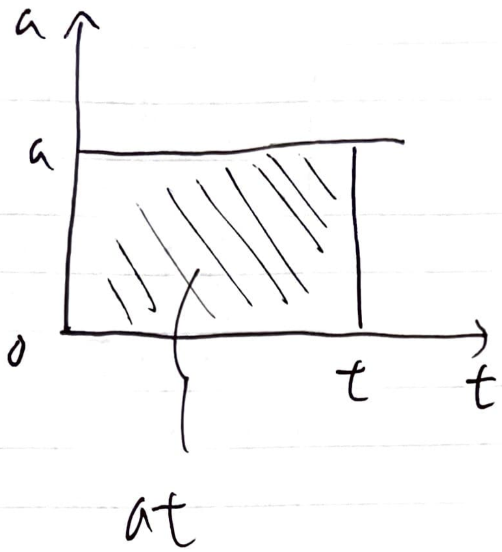
$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

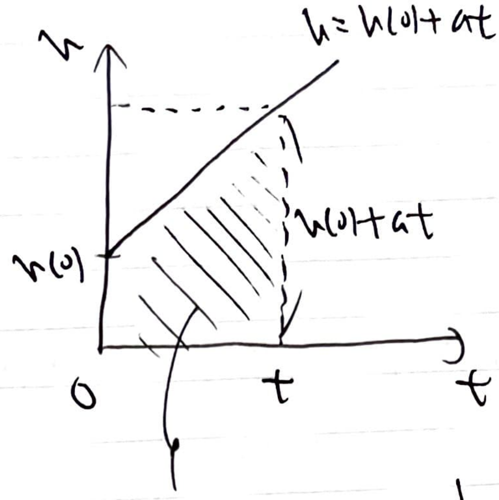
これにより、等加速度運動のみならず、例えば加速度が t の多項式で表される場合も積分することで時間追跡できる。(但し、そのようなケースはほとんど見たことない)

加速度や速度を積分するとは…？

⇓

ある一瞬の変化を、ある時間からある時間まで足し合わせる。





$$(v(0)+\{v(0)+at\})\times t\times\frac{1}{2}$$

$$= v(0)t+\frac{1}{2}at^2$$

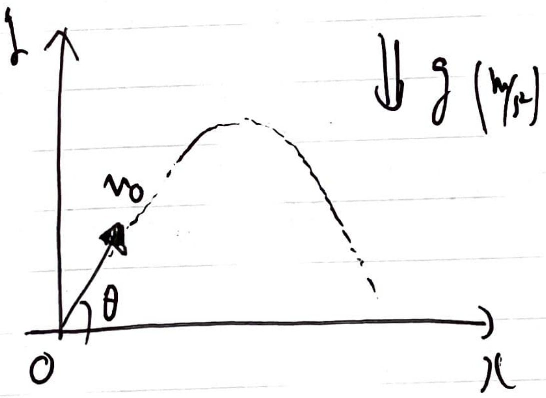
時間による積分は、実際上のグラフの面積を求めることと等価である。

故に、数IIを習っていない生徒に対しては有効な手法と言える。

(ex2) 放物運動

↓

空間に放り出された物体の自由運動(他の物体、例えば空気などに接触しない運動)

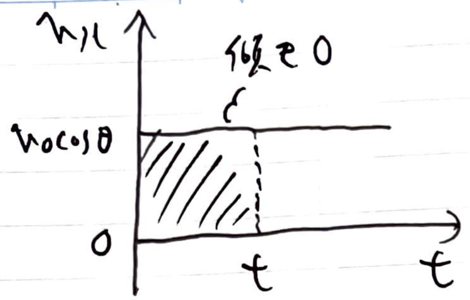


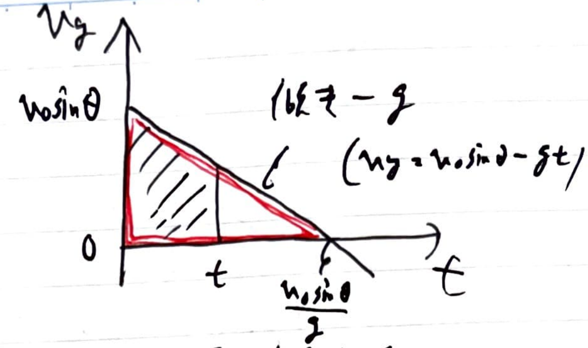
放物運動はあくまで理想的な(真空という前提)現象。現実には空気抵抗を受けるので問題はいっそう複雑である。

地球上の放物運動は、物体の種類や初速度に依らず、鉛直下向きに一定の大きさ(約 $9.8\ m/s^2$)の加速度(重力加速度と呼ぶ)を受けることが経験的に知られている。→ g と表す。(gravity)

加速度 $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

初期条件 $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_x(0) = v_0\cos\theta \\ v_y(0) = v_0\sin\theta \end{cases}$





$a_x(t)=0$ より、v-t グラフにおいて傾き0

一方、$a_y(t)=-g$ より、v-t グラフの傾き $-g$

v-t グラフの面積に着目すると

$$x(t)-x(0)=v_0\cos\theta\cdot t$$

$$\therefore x(t)=x(0)+v_0\cos\theta\cdot t=v_0\cos\theta\cdot t$$

$$y(t)-y(0)=\{(v_0\sin\theta-gt)+v_0\sin\theta\}\times t\times\frac{1}{2}$$

$$=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

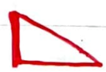
$$\therefore y(t)=y(0)+v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

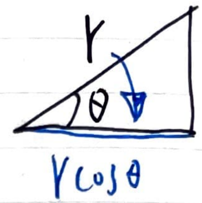
$y(t)$ と $x(t)$ の式において、時間を消去すると

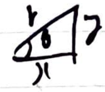
$$y=\tan\theta\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

となり、確かに放物線の運動となっていることが分かる。

また、最高点の高さHは上の2次関数を平方完成して求まるが、あるいは v_y-t グラフの  の面積からも求まる。

$$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}\cdot v_0\sin\theta=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$



一般的な教え方としては、 で、$\frac{x}{r}=\cos\theta$ だから $x=r\cos\theta$、$\frac{y}{r}=\sin\theta$ だから $y=r\sin\theta$ と、定義を踏んで行うのが通例。しかし、実用上、上図のように「rに対しθの向きをまたいだ辺が $r\cos\theta$、残りが $r\sin\theta$」の方が良いだろう。

・このように高校物理ではベクトル量は基本的に成分分解して考える。

No.
Date

運動の法則

一般的な理解では、「力が与えられたとき、加速度が決まり、運動が決定される」
しかしニュートンによると、「運動方程式とは力の定義である。速度の変化が観測されたとき、その変化の方向に、変化に比例した力が働いているものとする」

力の原理となる法則がニュートンによって提示された。

このあたりの詳細は「重力と力学的世界 上・古典としての古典力学」(山本義隆)あるいはプリンキピア(ニュートン)を参照

第1法則：物体が外力の作用を受けない限り、静止している物体は静止し続け、ある速度をもてばその速度のまま等速直線運動をする (慣性の法則)
第2法則：物体の加速度はその物体の受ける外力の向きに現れ、加速度の大きさは外力の大きさに比例し物体の質量に反比例する。(運動方程式)
第3法則：物体が力の作用を受けるとき、その物体はその相手に同じ大きさで逆向きの力を作用する。(作用反作用)

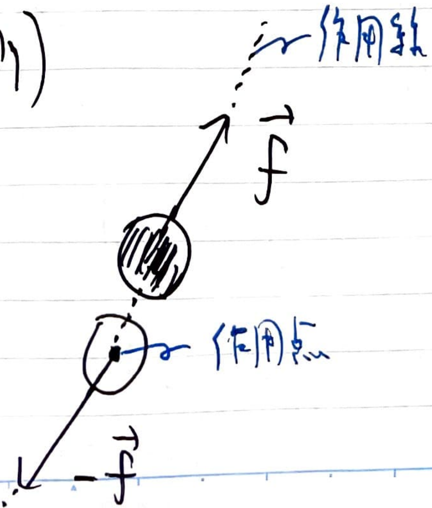
ここでは「力」を基本的な物理量として採用する。
(量子力学では、力は基本的な物理量ではない。エネルギーが物理量としてある)

以下、各法則を詳しく検討する。

第3法則 (作用・反作用の法則)

＊力は対で現れる

※「壁を押したら壁から押される」は不適切な表現。
(因果関係ではない!)



作用線・作用点は質点を扱う限りさほど重要とは思わない。大きさのある物体を扱うときは重要であるが、

第2法則（運動方程式）

加速度が力に比例し、質量に反比例

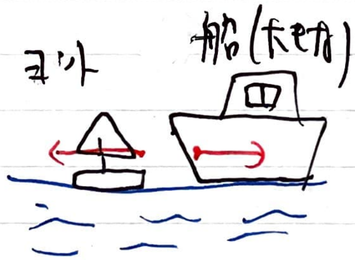
$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m}$$

比例定数 $k=1$ となるように、m と $\vec{F}$ を導入

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{（運動方程式）}}$$

このようにして力を「定義」する。また、ここで導入された m は正確には「慣性質量」と呼ばれる。

慣性とは…？



水上でヨットに乗っている人が大きい船を押したとする。第3法則により、ヨットは船より反作用を受ける。このとき、両者に作用する力は同じ大きさだが、大きな船はほぼ動じないがヨットは動くことが想像される。このような、物体に固有の、運動状態の維持する性質を、慣性質量と呼んで定量的に表すことにしよう。

m [kg]　a [m/s²]

$\Rightarrow \vec{F}$ [kg・m/s²] ≡ [N]

ニュートンと呼ぶ。（力の単位）

$\vec{F}$ や m はここで新しく導入された物理量であるが、この1つの式では物理的な意味を確定することはできない。そこで、とりあえず $\vec{F}$ と m の存在を認める、という立場をとることにする。

※「重力質量」とは？
万有引力の法則に関わる質量のこと。慣性質量とは区別できないことが知られている。

※「運動方程式って何故成り立つんですか？」という質問はナンセンスである。これが「原理」となるのである。そのとき初めて、様々な現象を予測できる。

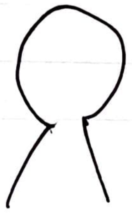
第1法則

第1法則は、言い換えると、
「運動方程式 $m\vec{a}=\vec{F}$ が成り立つ座標系の存在を認める」
ということである。

→ 慣性座標系と呼ぶ。

※初学の人にとっては難しいと思うので初めは気にする必要はない。

第1法則って、$\vec{F}=0$ なら $\vec{a}=0$ と読み換えられる。なので、第1法則 $m\vec{a}=\vec{F}$ の特別な場合であるから、第1は第2に含まれますよね?



初学者A

→ 答えは「No」

例えば、加速している物体上にいる観測者から見て、力を受けていない物体が加速してるように見える。

すなわち、$\vec{F}=0$ であるにも関わらず、$\vec{a}\neq 0$ となるような座標系がある。そのような座標系(非慣性系と呼ぶ)では運動方程式は成り立たない。

※加速度は見る人の立場によって異なる。すなわち、加速度は相対的な量である。

私たちの住む地球も、実際は加速度運動(自転、公転)なので、厳密には地球に固定された座標系は慣性系ではない。しかし、日常的なスケールの現象を扱う際は"近似的に"慣性系の立場から議論できる。

← 実験的に分かっている。

No.

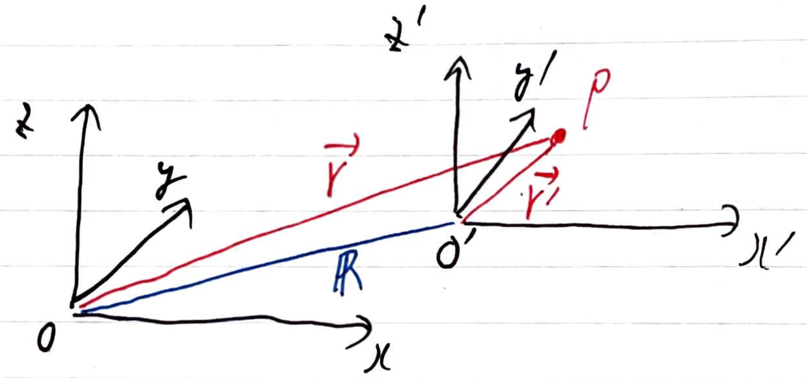
Date

座標系

よって、入試問題を解く際は特に断りがない限りは地球に固定された座標系を慣性系と見なして解く場合が多い。

扱う現象のスケールによっては

> 慣性系の存在を認めるとそれに対して等速直線運動する座標系も慣性系である。



2つの座標系 (x, y, z) と (x', y', z') から見た質点Pの運動について考える。(x', y', z') は (x, y, z) に対して $\frac{d\vec{R}}{dt}$ の速度をもつとする。

(x, y, z) の座標系を慣性系とすると

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}$$

ここで $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$ より、

$$m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \vec{f} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

慣性系に対して (x', y', z') 座標系が等速直線運動する、すなわち $\vec{R} = \vec{V}t$ と表されるとき $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$

(x, y, z) と (x', y', z') から見たPに作用する力は同じであると仮定している。これは特殊相対性理論の前提「どの慣性系から見ても物理法則は同じ」(相対性原理)による。

よって $m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \vec{F}$ となり、(x', y', z') 座標系でも第二法則が成り立つ。

また、加速度運動する場合でも、単純な並進運動ならば、

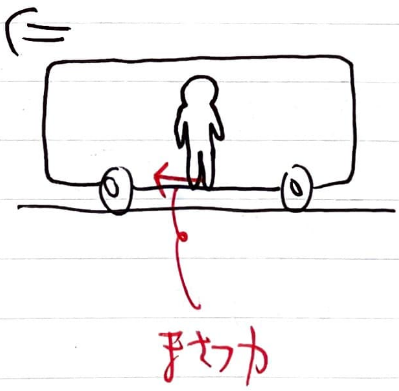
$$m\frac{d^2\vec{r'}}{dt^2} = \vec{F} \boxed{- m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}} \qquad \left(\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \neq 0\right)$$

として、作用する力に $-m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ をかえてやれば、運動方程式として議論可能である。この補正項は慣性力と呼ばれる。架空の力と呼ぶべき、という声もある。

心にとめておくべきことは

「慣性力とは単に数学的に導入された補正項であるにすぎない。実体的なものではない。」

よく見かける誤った説明としては、「バスに乗っている客に慣性力がはたらいたので、進行方向と逆向きの力を受けたように感じる」



~~バスの床からまさつ力を進行方向に受ける。すると~~

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$

$(\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{V}t)$

は2つの座標系をむすびつける関係であり、ガリレイ変換とよばれる。

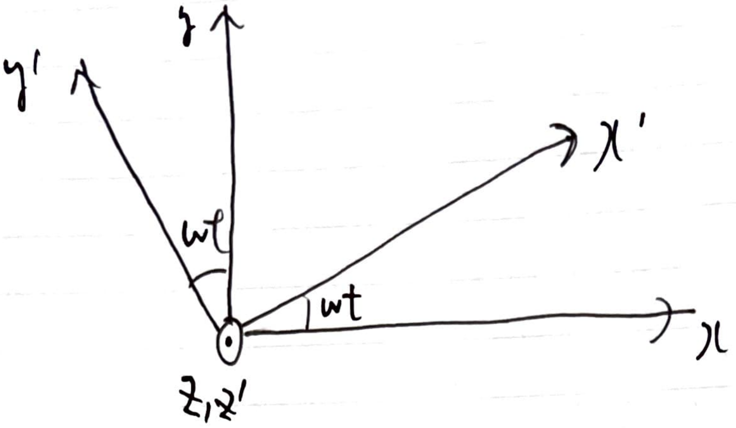
「ガリレイ変換によって慣性系とむすびつく座標系は慣性系」

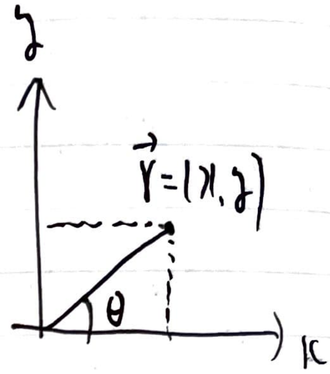
「ガリレイ変換のもと、ニュートンの運動方程式は不変」

これに関しては、多くの文献の議論は間違いであるので注意。

もちろん、慣性力の反作用など存在しない(それでも定義できるのか?)

等速回転系





(x, y, z)座標系に対して一定の角速度ωで回転する座標系(x', y', z')を考える。
t=0において各座標軸は重なっていたとする。

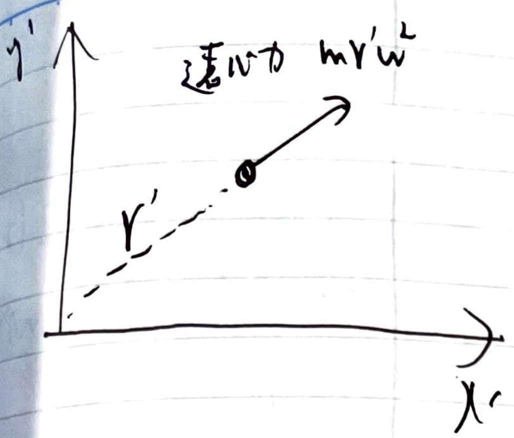
$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix} = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases}$$

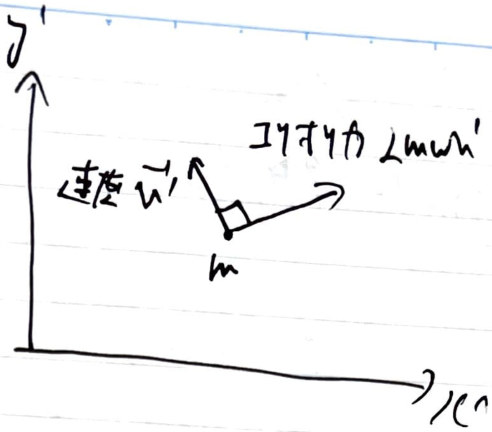
これをx, y, zについて解くと

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \\ z = z' \end{cases}$$

両辺を時間で2回微分すると

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t\cdot f_x + \sin\omega t\cdot f_y \\ -\sin\omega t\cdot f_x + \cos\omega t\cdot f_y \\ f_z \end{pmatrix} + \underbrace{m\omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{遠心力}} + \underbrace{2m\omega\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{コリオリ力}}$$





遠心力 $m\omega^2\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega^2 \dfrac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|}$ (回転から遠ざかる向き)

コリオリ力 $2m\omega\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v'} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix}$ との内積が0より、回転面内における

速度に対して垂直方向きである。

高校物理においてコリオリ力はほとんど扱わない。

また、角速度の変化に伴うオイラー力も

高校範囲外である。

$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$

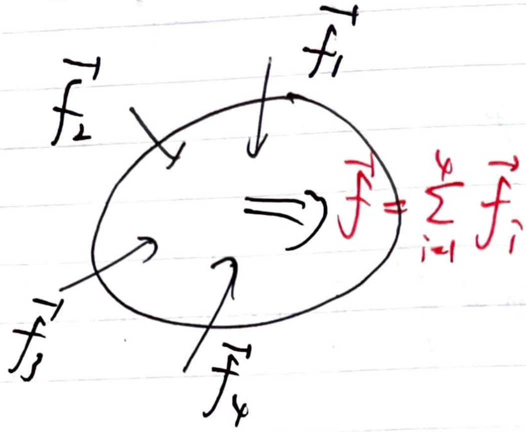
$|\vec{r'}| = |\vec{r}|$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}' \\ -\dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(-\frac{\pi}{2})} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

力の分類と扱い方

重ね合わせの原理

複数の外界から同時に力を受けるとき、その物体に働く外力$\vec{F}$は



$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$$

のように単純な和で書ける。言い換えると、その物体にはたらく外力を、個々に分解し、独立評価ができる、ということである。これは他の法則から説明できないので、原理として要請する必要がある。

→ 我々は力の合成をする能力が与えられた!

これも、教える際は強調しなくても良いかもしれない。

→ $m\vec{a} = \vec{F}$ の $\vec{F}$ として各々の寄与を単に足し合げることで解くことができるようになった。

自然界の力

- 強い力…
- 弱い力…
- 重力(万有引力)
- 電磁力

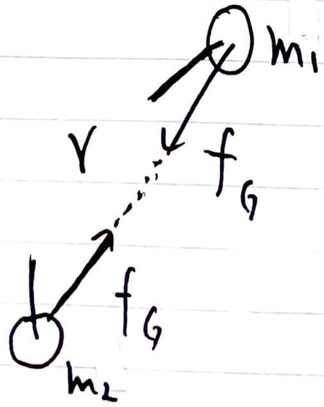
(強い力・弱い力)ミクロな現象で現れる → ここでは扱わない

- 万有引力

$$\boxed{f_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \ (\text{引力})$$

$G \doteqdot 6.7\times10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}]$

(万有引力定数)



万有引力はニュートンによって帰納的に発見された。

Gの値は(我々の日常的な現象のスケールに比べて)非常に小さいので、天体といったような非常に質量が大きい場合でない限り、特に影響がないときは無視する。また、2物体間の距離が小さくなれば f_G は大きくなるが、その時はクーロン力の方が支配的になるので、結局は無視できる。

$m_1 = m_2 = 1$ [kg]

$r = 1$ [m]

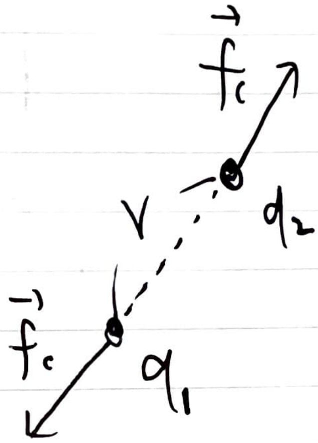
$\Rightarrow f_G = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$

$\fallingdotseq \frac{6.7\times10^{-11}\times1\times1}{1\times1}$

$= 6.7\times10^{-11}$ [N]

・クーロン力

$$\boxed{\begin{array}{l} f_C = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \\ q_1 q_2 > 0 : \text{斥力} \\ q_1 q_2 < 0 : \text{引力} \end{array}}$$



$k \fallingdotseq 9.0\times10^9$ [N·m²/C²] (クーロン定数)

→ 真空中での値

C：クーロン

(電荷量の単位)

$q_1 = q_2 = 1$ [C]

$r = 1$ (m)

$\Rightarrow f_C = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$

$\fallingdotseq 9.0\times10^9$ [N]

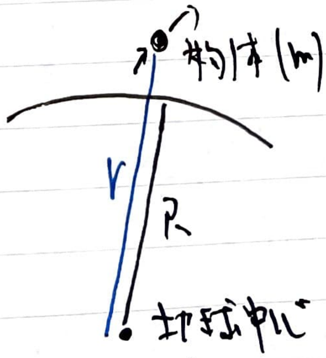
$f_C \gg$ (上の) f_G

※ 重力

地球上(あるいは地球周辺)での物体の運動を調べる際は、地球からの万有引力のみ考慮すればよい。

物体mが地球から受ける万有力

$$f = G\frac{Mm}{r^2}$$



(R≒r)

M：地球の質量，r：地球中心からの距離

R≒r とすると

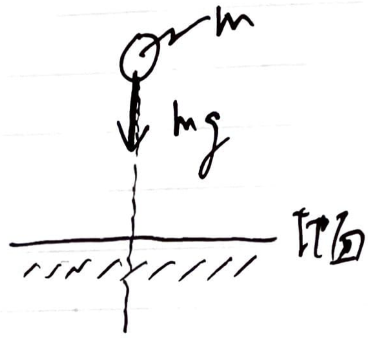
R≒6400 [km]

なので、r (せいぜい10km) に比べて大きい。

$$f \fallingdotseq G\frac{M\cdot m}{R^2}$$

地上での放物運動の観測結果にもとづくと、物体は下向きに一定の大きさ mg の力を受ける。この正体は地球からの万有引力である。

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \therefore \; g = \frac{GM}{R^2} \;(一定)$$



重力は地球の自転による遠心力の影響を受けるが、断りがない限りは無視する。

※重力以外の力

電気的に中性な物体の運動を考えるときは、重力以外の力としては、その物体に働くクーロン力の重ね合わせを考えればよい。

接触面で生じる
あるいはその近傍

しかし、接触面に存在する全ての電子や原子核の位置を調べあげることは不可能である。
よって、1つ1つのクーロン力を計算して重ね合わせる、なんてことは現実には不可能である。

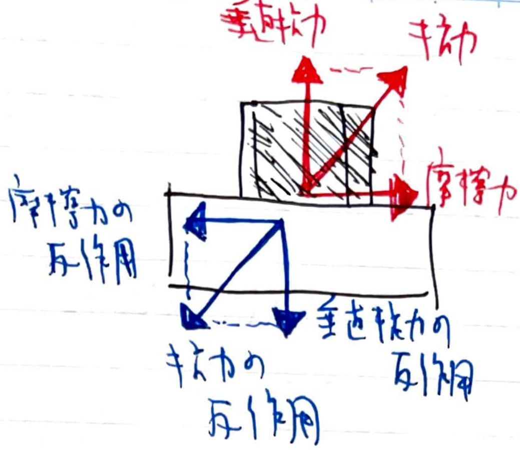
Q：ならどうするか？

A：加速度を観測し、運動方程式から求める。（未知量としておく）

接触面以外（と近傍）からの寄与は、遠くから見て原子核(+)と電子(−)が打ち消し合って見えるので、ないものと見なす。

ばねの弾性力は法則があるが（フック）、（線形な領域での）観測結果である。

・抗力 … 接触したときに、互いに押し合う向きに現れる。

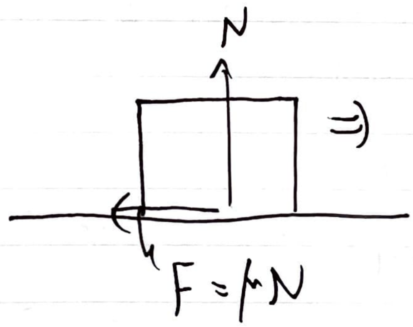


向きや大きさそのものは接触面のミクロな状態に依存するため、一意に定まらない。

抗力は通常は成分分解して考える。

垂直成分 … 垂直抗力 → Nとおく
水平成分 … 摩擦力 → Fとおく

物体が水平に ~~動いている~~ 滑って とき、Fは公式として与えられる。



$F = \mu N$ (動摩擦力)

(μ: 動摩擦係数)

→ 向きは 相手に対してずれている向きと逆向き

物体が ~~止まっている~~ 滑っていない 状態では 静止摩擦力 が働く。基本的にはこれは未知量として扱う必要がある。ただし上限値に関しては公式があり、静止摩擦係数 μ_0 を用いて

$F_0 = \mu_0 N$ (最大静止摩擦力) と表される。

(☆)

(抗力) ↔ (抗力の反作用)

⇓ 成分分解

(摩擦力) ↔ (摩擦力の反作用)

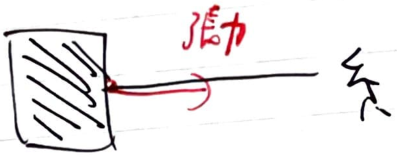
※ベクトルとして書いて

$$\vec{F} = -\mu N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

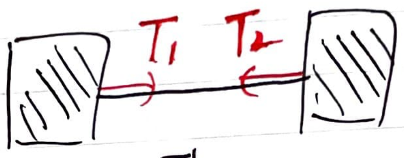
※ 現実には動摩擦係数の値は一定でないが、単純化してここでは一定とする。

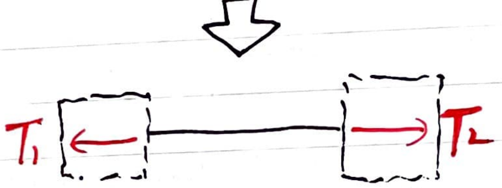
最大静止摩擦力は現実に働いている摩擦力とは区別する必要がある。$F_0=\mu_0 N$は力の図示の段階では現れない！

・張力 → 大きさは未知量として設定する。



質量が無視でき、伸縮しないしなやかな糸に結びつけられた物体を考える。このとき、物体は糸が延びている方向に力を受ける。（張力）
（ゆるむと張力0）





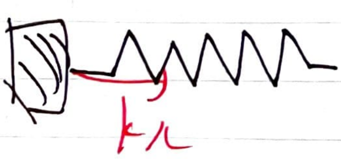
2つの物体を糸でつなぐ場合、糸に働く張力の大きさはどこでも等しくなる

㊟ 糸の運動方程式より、

$$0\cdot a = T_2+(-T_1) \quad \therefore T_1=T_2$$

・弾性力 → 高校では公式として使う。

糸の時と同様、質量を無視する。



ただし伸び縮みする。向きは自然長にもどる向き

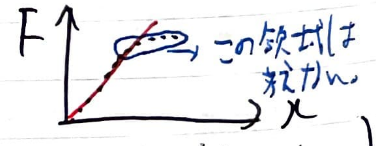
「ばねの弾性力の大きさは、ばねの伸びあるいは縮みに比例する」（フック則）

$$F=\underbrace{k}_{\text{ばね定数}}x$$

糸の張力と抗力も弾性力の一種である。しかし、糸などは伸縮度合いが非常に小さい（ばね定数が非常に大きい）

→フックの法則にうまくあてはめられない

ばねの弾性力 $F=kx$ を理論的に計算する（ばねを構成する粒1つ1つを考える）ことは不可能なので、実測することで決める。



（x：ばねの伸びもしくは縮みの大きさ）

・浮力

・抵抗力

空気抵抗力
→ 問題文で指示がある時。多くは速さvに比例する。(v^2に比例するのもまれにある)

運動方程式の書き方

これまで見てきた力は以下の2種類に分類される:

公式のある力…重力、(クーロン力)、弾性力、動まさつ力
(それ以外にも設定される力もある)
未知量でおく力…張力、垂直抗力、静止まさつ力

入試ではこのように分類しておくべき

$$m\vec{a} = \vec{f}$$

公式のある力のみが物体にはたらく場合、$\vec{F}$があらかじめ決まっているので加速度が求まる。しかし、未知量でおく力に関していうと、運動に関する条件(束縛条件)がないと加速度が求まらない。これも含めて、運動方程式の立て方を検討していく。

論理の順番が逆!

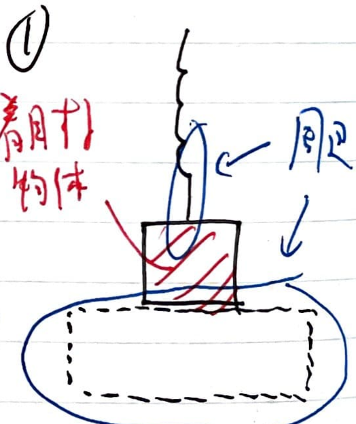
未知量でおく力は束縛力とも呼ばれる。

運動方程式の立て方

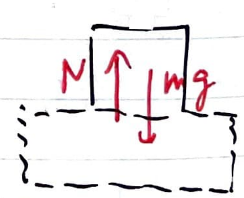
① 注目する物体に対し、物体と周辺を図示する
② その物体が受ける外力を①の図に書き込む
③ 物体の加速度を設定する
④ 座標系を設定して成分ごとに運動方程式を各軸に正射影する。

⑤ この一連の作業を登場するすべての物体に適用し、連立方程式により未知量を求める。

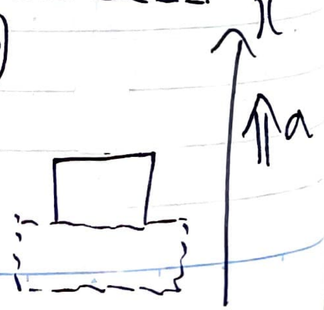
①



②



③④



①においては、2物体が同じ加速度である場合も、1物体ずつ考えることを推奨する。

②において、「公式のある力」なのか「未知量でおく力」なのかをしっかり区別して図示する。

③において、②で図示した力が全て「公式のある力」だったならば、加速度は自動的に決まる。しかし、1つでも「未知量でおく力」が含まれていれば、その個数だけ運動に関して条件がないと加速度は決まらない。言い換えると、入試問題では未知量でおく必要のある力があるところには必ず運動に関する条件が与えられる。

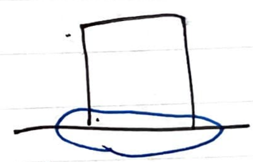
④では適当な座標系（入試では直交座標）を設定して、各成分に対して運動方程式を正射影する。とる座標系は問題に応じて適切なものを選ぶ。

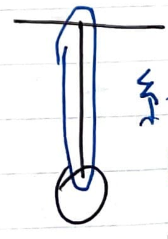
⑤では単に計算する。
ここで、（未知量の数）＞（式の数）となってしまった場合、条件の抜けもれがないか確認する。

$m\vec{a} = \vec{F}$
結果　原因
力$\vec{F}$が加えられたとき結果として加速度$\vec{a}$が生じる、という因果関係を表す。
i) 公式のある力、設定された力
⇒ 原因から結果が分かる。
ii) 未知量でおく力
⇒ 結果（与えられる条件）から原因を推察する。

※物理現象が決まっている、ということは解が一意に定まる、ということである。

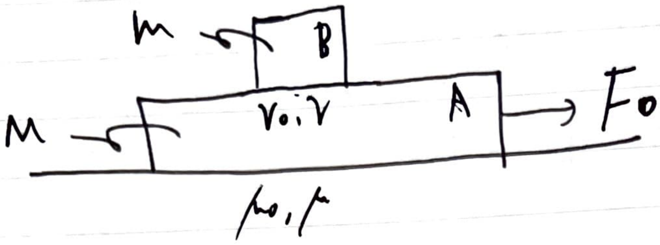
例としては…





両者とも、運動に関する条件によって、加速度の=0となるのである。

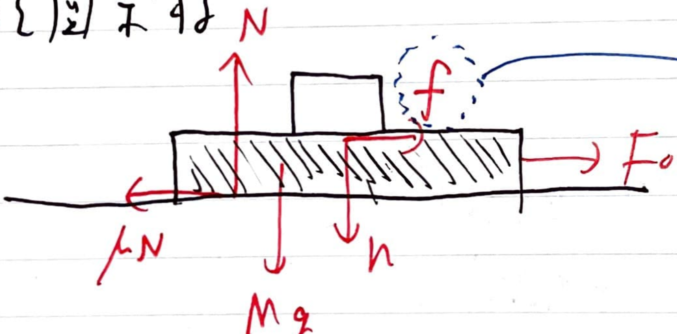
(ex1)



物体Aを水平方向に一定の大きさF_0で引くと、AとBは一体となって床に沿って滑った。

① 物体Aに着目する

② 力を図示する



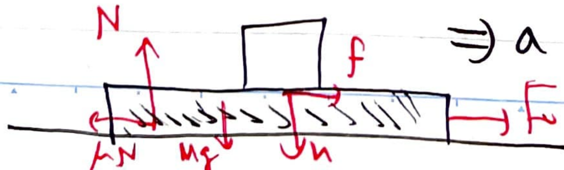
Mg, F_0 ⇒ 公式、あるいは設定された力
(μN)

N, n, f ⇒ 未知量でおく力

③ 加速度を設定する

「床に沿って滑る」→ 加速度は水平方向

ただし、大きさは不明なのでaとおく。



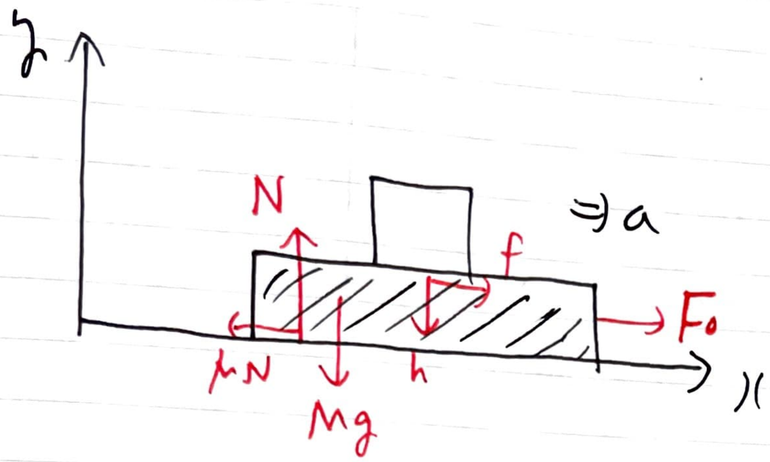
☆

静止まさつ力は未知量でおくのに注意。また向きも判断しにくい。(他の外力との関係で定まる)

よって、大きさでなく符号をもつ量として設定することもできる。

No.
Date

④ 座標軸を決め、各方向に運動方程式を正射影する。

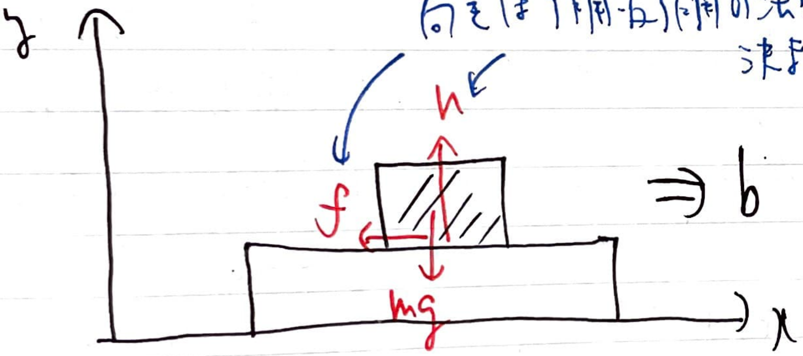


x方向：$M \cdot a = F_0 + f + (-\mu N)$
y方向：$M \cdot 0 = N + (-n) + (-Mg)$

この時点で
未知量4, 式2

⑤ 一連の作業を物体Bにも適用すると、

向きは作用反作用の法則から決まる。



明らかな場合は、初めから束縛条件を運動方程式に反映させて書き下すこともできる。

x方向：$m \cdot b = -f$
y方向：$m \cdot 0 = n + (-mg)$
この時点で、方程式4つに対して未知量5つである。
しかし「AとBは一体となって運動する」という条件より、

$b = a$

以上を連立すると、
$n = mg$, $N = (M+m)g$, $a = b = \frac{F_0}{M+m}$, $f = -m\left(\frac{F_0}{M+m} - \mu g\right)$

$a = \frac{F_0}{M+m} > 0$ より、
$f < 0$ である。
これは、設定した向きとは逆向きである（左向き）ことも意味する。

A, Bの間に滑りが生じなかったので、

$$|f| \leqq \nu_0 n$$

i.e. $\dfrac{mF_0}{M+m} - \mu mg \leqq \nu_0 mg$

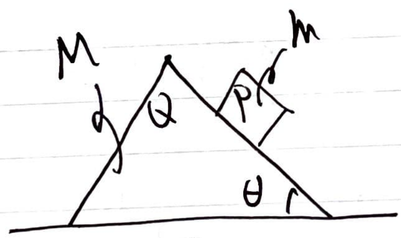
これより $F_0 \leqq (\mu + \nu_0)(M+m)g$

一方、AとBが一体となって滑り出すには、
F_0はAと床の間の最大静止摩擦力を超えている必要があるので、

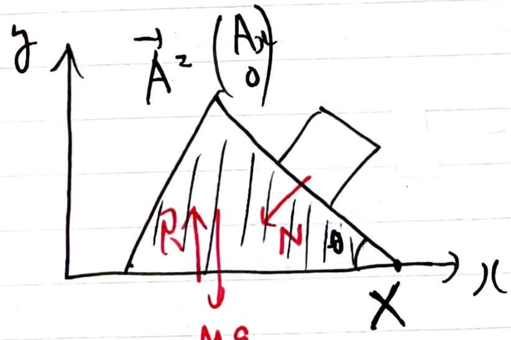
$$F_0 > \mu_0 Mg + \mu_0 mg = \mu_0 (M+m) g$$

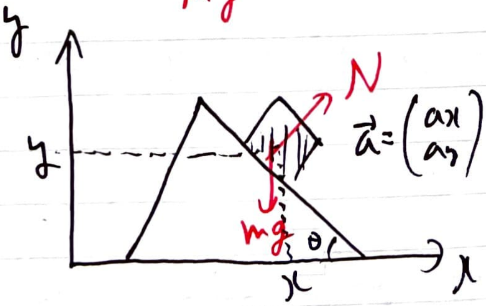
よって $\mu_0 < \mu + \nu_0$ が成り立つ必要がある。

(ex2) 物体Pを物体Q上にのせた。接触部の変形は考えないものとする。また摩擦も無視する。



①〜③の一連の作業を各物体に適用した図が右2つである。
未知量でおく力はN, Rである。
また、Qと床の接触部の変形はないので、$\vec{A}$のy成分は0である。





なお、2物体系の問題は、基本的には複数物体系の理論で解く。
すなわち、運動量保存則とエネルギー保存則を用いる。
このように個々の運動方程式によって解けるケースは、束縛条件が単純という特殊な場合のみという風に認識すべきである。

④ 各方向に運動方程式を正射影すると、

P：x成分 $m a_x = N\sin\theta$

y成分 $m a_y = N\cos\theta - mg$

Q：x成分 $M \cdot A_x = -N\sin\theta$

y成分 $M \cdot 0 = R - N\cos\theta - Mg$

この時点で、未知量5つに対して式が4つであと1つ条件が足りない。

PとQの接触部が変形しないという条件より、

$$y = (X - x)\tan\theta$$

これを時間で2回微分すると

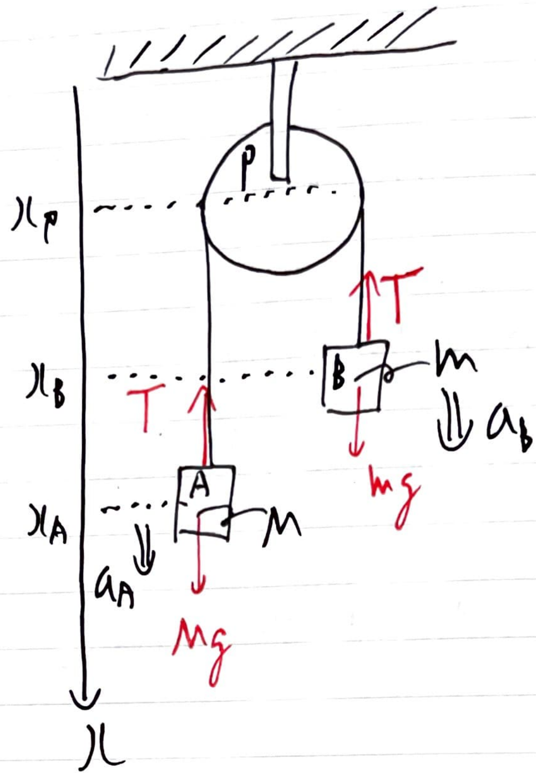
$$a_y = (A_x - a_x)\tan\theta$$

より、未知量と式の数が同じになったのであとは頑張ればよい。

$$N = \frac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}, \quad R = \frac{M(M+m)g}{M + m\sin^2\theta}$$

次元解析

(ex3)



物体Aについて、

$M\cdot a_A = Mg - T$

物体Bについて、

$m\cdot a_B = mg - T$

糸は伸び縮みしないので、

$(x_A - x_P) + (x_B - x_P) =$ 一定

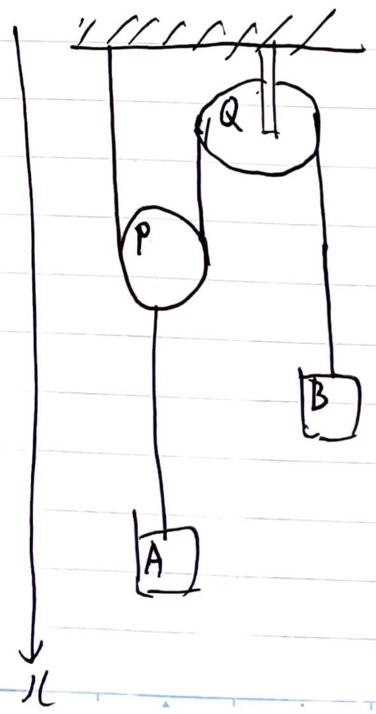
x_Pは固定されているので一定。両辺を時間で2回微分すると、

$a_A + a_B = 0$

∴ $a_A = \frac{M-m}{M+m}g$, $a_B = \frac{m-M}{M+m}g$,

$T = \frac{2M}{M+m}g$

(ex4) (応用)



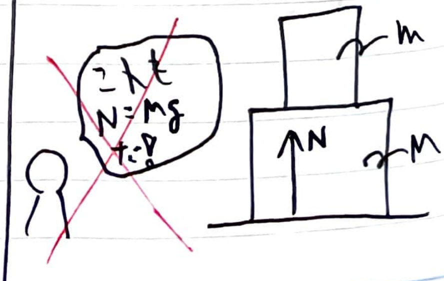
運動方程式を自力で解くのには、慣れるまである程度時間がかかる。手順をおさえたら、なるべく色々な問題を経験するべきである。

ただし、大抵の問題集の解答解説は首尾一貫としたものになっていないので要注意。

(ex)

図より、$N = mg$

「Nっていつもmgに等しいのか!」と勘違いする生徒が世の中で続出しているのは、そういうことである。



一般においては
わざわざ※としたのは、特殊であるから。

※空気抵抗力の働くケース

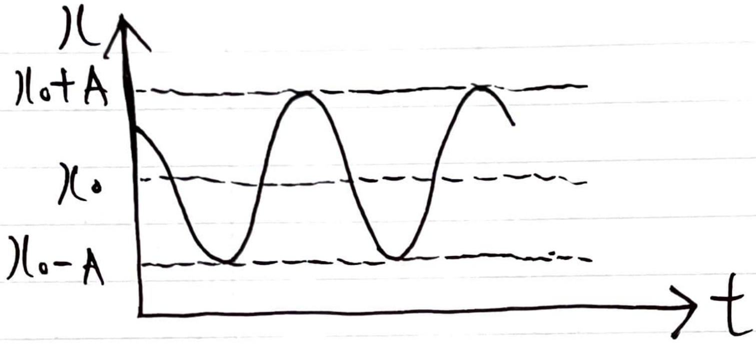
空気抵抗力はよく
$-kv$と表せるので、
公式のあるか、と
するべきかもしれないが、

単振動

→ 位置の時間変化が正弦関数(余弦関数)で表される、一直線上の運動

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{振動中心}} + \underbrace{A}_{\text{振幅}} \sin(\overbrace{\underbrace{\omega}_{\text{角振動数}} t + \underbrace{\delta}_{\text{初期位相}}}^{\text{位相}}) \quad \cdots ①$$

$\omega > 0,\ A > 0$ とする。



振動の周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

振動数 $f \equiv \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ (単位時間あたりの振動の回数)

$[\underbrace{Hz}_{\text{ヘルツ}}] \equiv [s^{-1}]$

平均の位置

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x\,dt = x_0$$

速度 v は、

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \delta) \quad \cdots ②$$

平均の速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \delta)\,dt = 0$$

速さ $|v|$ が最大のとき、$|\cos(\omega t + \delta)| = 1$

$$v_{max} = \omega A$$

運動方程式の形から、「これは単振動」と判別できるようにしたい…!!

単振動の運動方程式

解が①になるような運動方程式を見つける。
そのために、①の両辺を時間で2回微分する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t+\delta)$$
$$= -\omega^2(x-x_0)$$

よって、①が $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-x_0)$ の解であることが分かった。

逆に、運動方程式が $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-x_0)$ の形で書けたならば、$x(t)$ は①の形に書けることが知られており、これをここで証明しておく。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-x_0)$$

$X = x-x_0$ と変数変換

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2X$$

両辺に $\frac{dX}{dt}$ をかけると、

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right) = -\omega^2X\frac{dX}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2\right\} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega^2X^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2X^2\right\} = 0$$

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \omega^2X^2 = K \text{ (定数)}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{X}{\omega^{-1}\sqrt{K}}\right)^2 = 1$$

①：$x = x_0 + A\sin(\omega t+\delta)$

「$x(t)$ が①のように表せる」

$\Downarrow$ ok. $\Uparrow$?

「$x(t)$ は $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x-x_0)$ の解である。」

※初学者や受験生はこの証明はできなくてよい。入試では問われない。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}X^2\right) = X\cdot\frac{dX}{dt},$$

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2\right\}$$

これより、パラメータ θ を用いて、

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \sqrt{K}\cos\theta \quad \cdots (1)' \\ X = \omega^{-1}\sqrt{K}\sin\theta \quad \cdots (2)' \end{cases}$$ と表せる。

$(2)'$ を時間で微分すると $(1)'$ の右辺に一致するので、

$$\frac{d}{dt}\left(\omega^{-1}\sqrt{K}\sin\theta\right) = \omega^{-1}\sqrt{K}\cdot\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \sqrt{K}\cos\theta$$

$\because \frac{d}{dt}(2)' = (1)'$

よって、 $$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\theta = \omega t + \delta$$

$A = \omega^{-1}\sqrt{K}$ とおけば、$(2)'$ は

$$X = A\sin(\omega t + \delta)$$

$X = x - x_0$ だったので、

$$x = x_0 + A\sin(\omega t + \delta)$$

[証明終]

K：速度の2乗の次元

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0)$$

単振動のパラメータ x_0 と ω は単振動の方程式に入っている。残り2つのパラメータ A と δ は初期条件より求まる。しかし、位相の値は直接観測されない。そこで、

$$x = x_0 + A\sin(\omega t)\cdot\cos\delta + A\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin\delta$$

$$= x_0 + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$$

受験生はこの形で覚えておくのが実用的。

$(C_1 = A\cos\delta,\ C_2 = A\sin\delta$ とおいた$)$

と変形し、これを単振動の位置の一般形とすることで、

より使い勝手のよい形とすることができる。なぜならば、
$t=0$ のとき、

$$x(0) = x_0 + C_2 \quad \therefore C_2 = x(0) - x_0$$

また、$\frac{dx}{dt} = C_1 \omega \cos(\omega t) - C_2 \omega \sin(\omega t)$ より、

$$v(0) = C_1 \omega \quad \therefore C_1 = \frac{v(0)}{\omega}$$

のように、任意定数 C_1 と C_2 が観測される値で表されるからである。

以上より、単振動の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ は

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t) + (x(0)-x_0)\cos(\omega t) \\ v(t) = v(0)\cos(\omega t) - (x(0)-x_0)\sin(\omega t) \end{cases}$$

と表される。

まとめると…

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\bigcirc(x - \triangle)$$

のように運動方程式が書けたなら、

角振動数 $\omega = \sqrt{\bigcirc}$ ，振動中心 $x_0 = \triangle$

一般解 $x(t) = x_0 + C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$

C_1 や C_2 は初期条件 ($x(0)$ と $v(0)$) から求める。

しかし説明するときは

$x = x_0 + A\sin(\omega t + \delta)$

の方がよさそうだ。

入試において、これを覚えておく、という手も一応ある。しかしその場合でも定性的な理解が伴ってなければならない。

(ex) $x(t) = \ldots + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t) + \ldots$

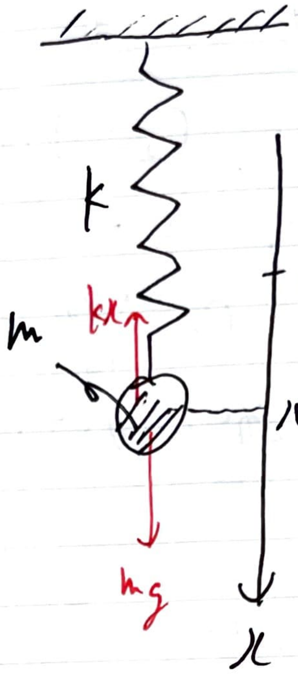
t で微分したら ω がでてきて $\cos(\omega t)$

$t=0$ を入れたら $v(0)$ になるよな…!

$) A\sin(\omega t + \varphi)$

(ex1)

ばねが自然長の位置から物体を静かに放す。



自然長の場所

右図のように、ばねが自然長のときの物体の位置を原点にとる。

運動方程式を書き下すと、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)}$$

これより、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$、振動中心 $x = \frac{mg}{k}$

一般解は、$x = \frac{mg}{k} + C_1\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

速度 $\frac{dx}{dt} = C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

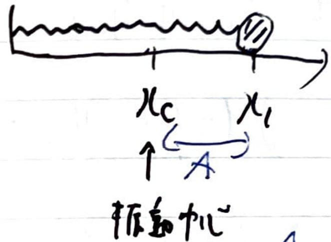
初期条件 $x(0)=0$, $v(0)=0$ より

$$\begin{cases} \frac{mg}{k} + C_2 = 0 \\ C_1\sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} C_2 = -\frac{mg}{k} \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

よって $x = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

初速0で運動を始める場合、そこが振動の端点なので、中心との距離から振幅が求まり、$x(t)$の関数形が分かる。

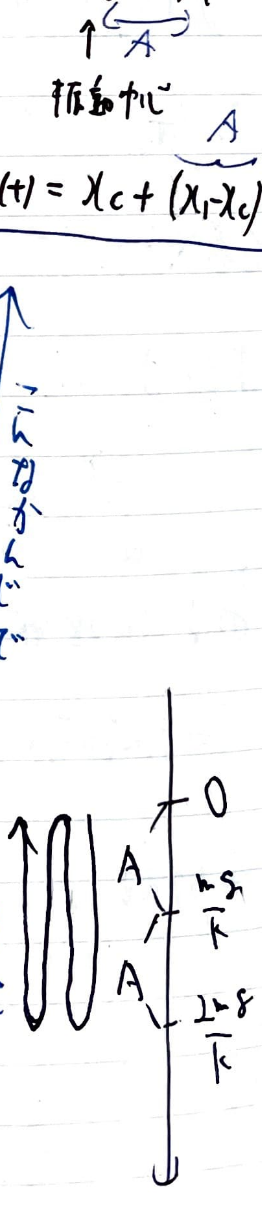
正の最大からスタートするので $\cos\theta$ の形になる



$$x(t) = x_c + \overbrace{(x_1 - x_c)}^{A}\cos(\omega t)$$

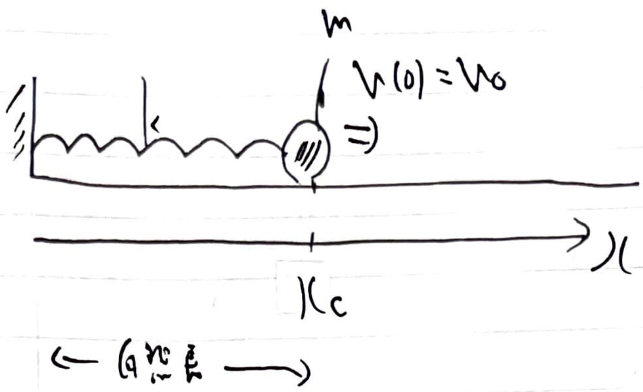
こんなかんじで

負の最大からスタートなので $-\cos\theta$ の形になる



(ex2)

自然長のときの物体(静止)に初速v_0を与えた。



運動方程式より、 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_c)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x-x_c)$$

角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, 振動中心 $x=x_c$

一般解 $x = x_c + C_1\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

速度 $v = C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

初期条件 $x(0)=x_c$, $v(0)=v_0$ より

$$\begin{cases} x_c = x_c + C_2 \\ v_0 = C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \left(= \frac{v_0}{\omega}\right) \end{cases}$$

よって、 $x = x_c + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

振動中心(つり合いの位置)で初速を与える場合、(振幅の形 $\frac{v_0}{\omega}$ がわかってれば) $x(t)$ の関数形が分かる。

振動中心から正の方向にスタートなので $\sin\theta$ の形になる。

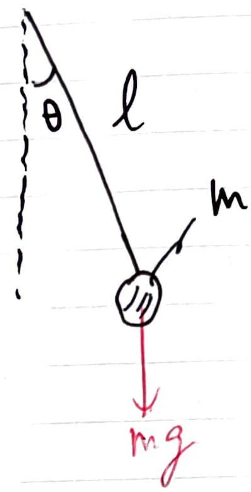
(ex1)(ex2)のようなパターンが大学入試の9割くらいである。このようなときは振幅を求めて関数形($\sin\theta$か$\cos\theta$か)を決め打ちしたほうが早い。それ以外の時は初期条件を代入して求める。

通常の問題集だと、エネルギー保存則から振幅を求めて関数形を決めているが、それだと時間がかかる。

$\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ 微分したら $v_0\cos(\omega t)$ $t=0$ 入れれば v_0 になるよね。

単振動への近似

1. 振り子



$$m\frac{d}{dt}\left(l\frac{d\theta}{dt}\right) = -mg\sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

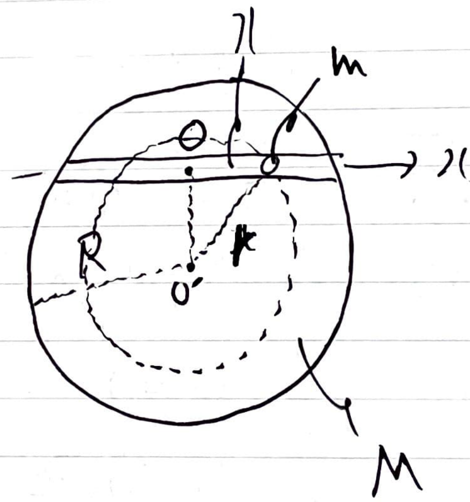
$|\theta| \ll 1$ の場合、$\sin\theta \simeq \theta$ と近似できるので、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

一般に、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\square\sin\theta$ の形の方程式を解くのは難しいので、エネルギー保存則を用いることとしよう。(円運動のセクションを参照)

2. 地球トンネル

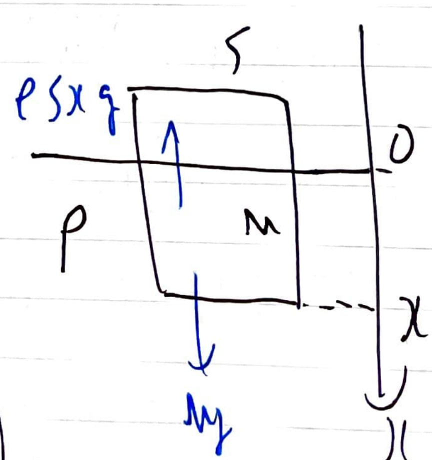


$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM\left(\frac{r}{R}\right)^3 m}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$= -\frac{GMm}{R^3}x$$

$$\therefore\ \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

3. 浮力



$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - \rho Sxg$$

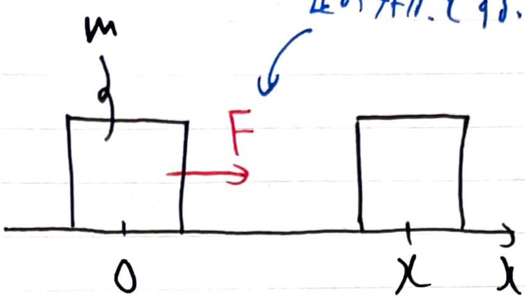
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\rho S g}{M}x + g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\rho S g}{M}\left(x - \frac{M}{\rho S}\right)$$

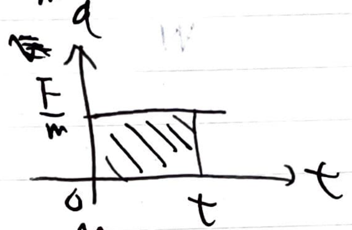
$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S g}{M}},\quad x_c = \frac{M}{\rho S}$$

■ エネルギー

x軸上を運動する質量mの物体を考える。最初原点に静止していたとする。

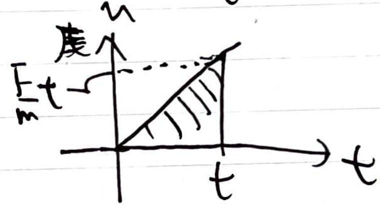


運動方程式より、$ma = F$ ∴ $a = \frac{F}{m}$



v-tグラフの面積

$$v = \frac{F}{m} \cdot t \quad \cdots ①$$



x-tグラフの面積

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \quad \cdots ②$$

①②よりtを消去して

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = F \cdot x$$

左辺を運動エネルギー、右辺を物体のされた仕事と呼ぶことにしよう。単位は $[J] \equiv [kg \cdot m^2/s^2]$ ジュール

数学的には、運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

左辺は運動エネルギーの時間変化率であり、右辺は仕事の時間的割合である。これを仕事率と呼ぶ。

時間を消去するので、時間に関する情報はエネルギーの関係式からは消えている。(位置と速さを結びつける)

$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$ から $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)$ への変形は、逆をたどると何故そうなるかがすぐ分かる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right)$$

$$= v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}$$

$$= \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

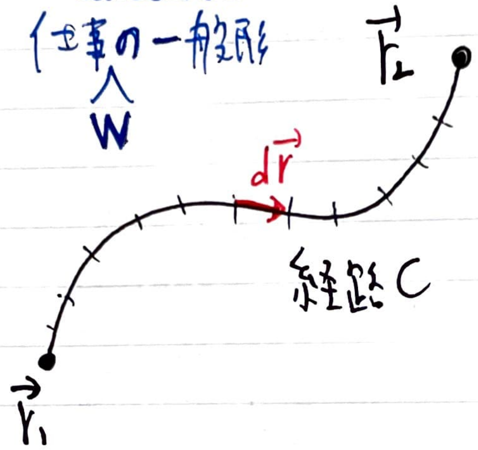
初学者や高校生は、まず1次元で考えるのが良い。

さらに、両辺を時間について、t_1からt_2まで和をとると、

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}\cdot\vec{v})\,dt$$

$$= \int_C \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{仕事の一般形}\ \wedge\ W}$$

右辺の積分は任意の経路C上を無限小の区間に分割したとき、各区間ごとの$\vec{F}$と$d\vec{r}$の内積を足し合わせることで求まる。



一般的には、経路Cに沿った移動が実現した後に仕事の値が決まる。

移動中$\vec{F}$が一定である場合、

$$W = \vec{F}\cdot\int_C d\vec{r} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

となり、この形だと簡単に仕事が計算できる。

なお、$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = (\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot\vec{v} = \vec{F}_1\cdot\vec{v} + \vec{F}_2\cdot\vec{v}$$
$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = (\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}_1\cdot\Delta\vec{r} + \vec{F}_2\cdot\Delta\vec{r}$$

仕事率や仕事も重ね合わせの原理に従う。

状況に応じて$\vec{v}$と書いたり、ひと書いたりする。

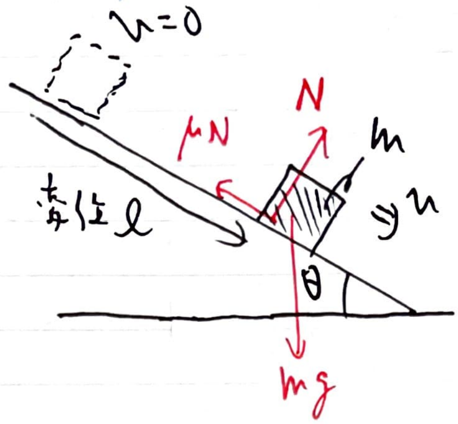
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}\,dt = d\vec{r}$$

(ライプニッツの記号)

一般に仕事の計算は線積分で求めるが、高校範囲外である。

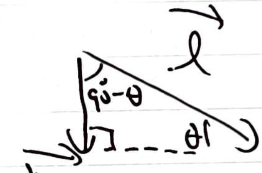
(ex1) まさつのある斜面
(動まさつ係数μ)を初速0
で滑り出した。l 進んだとき
の速さvを求めよ。
(接触部の変形は考えない)
仕事とエネルギーの関係で
求めてみる。



物体にされた仕事 $W = W_g + W_N + W_\mu$
(重力) (垂直抗力) (まさつ力)

$W_g = mg \cdot l \cdot \cos(90^\circ - \theta)$

$= mgl\sin\theta$



$\vec{mg} \cdot \vec{l}$

$\vec{f_s}$

(内積は一方のベクトルの大きさと
他のベクトルの正射影の積として
$(mg\sin\theta) \cdot l$ あるいは $mg \cdot (l\sin\theta)$
と考えてもよい)

$W_N = N \cdot l \cdot \cos 90^\circ = 0$

$W_\mu = \mu N \cdot l \cdot \cos 180^\circ = -\mu N l$

運動方程式と束縛条件より、$m0 = N + (-mg\cos\theta)$

$N = mg\cos\theta$

よって、$W = mgl\sin\theta - \mu mgl\cos\theta$

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mg\overset{l}{\vee}\sin\theta - \mu mg\overset{l}{\vee}\cos\theta$$

$$v = \sqrt{2gl(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

力学的
✓エネルギー保存則は
使えるのに、仕事の
計算はできない
生徒が多すぎる。

※もちろん、運動方程式
から時間追跡もでき
る(加速度⇒速度)
一般に、等加速度運動
と単振動の場合、
運動方程式かエネルギー
の2つの選択肢が
ある。(ただし時間
を問われたら運動方
程式で解く)

図を書いて力と変位
の内積を求めていく。

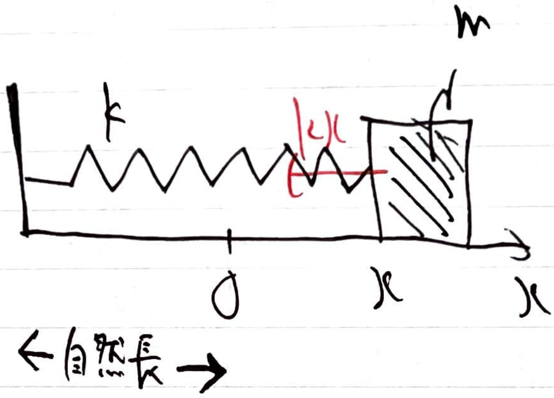
(ex1)のように、運動の間一定のベクトルの場合なら、簡単に仕事が計算できる。

一定でない力の仕事を求めるのは、一般には高校の範囲だとできない(線積分が必要)。しかし一直線上であり、かつ力が位置の関数で与えられる場合は、数Ⅲの積分の知識で解ける。

(ex2)

ばねの弾性力

$$f = -kx$$

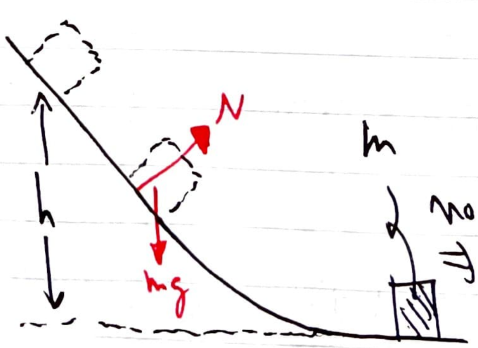


例えば、物体が $x=s$ から $x=0$ まで移動する間の弾性力の物体になす仕事

$$W = \int_s^0 (-kx)\,dx = \frac{1}{2}ks^2$$

この分だけ、ばねから物体にエネルギーが移動した、と解釈するべき。

(ex3) 水平面となめらかにつながる、まさつの無視できる曲面上の運動を考える。接触部の変形は無視する。



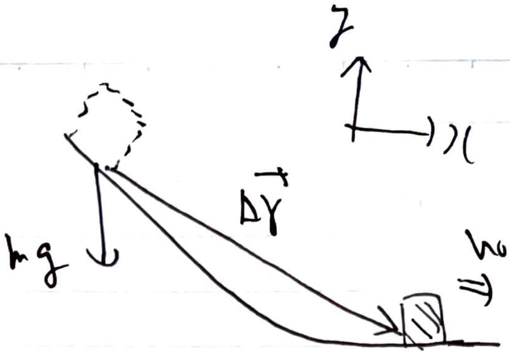
(ex1)
→ 一直線上かつ力が一定

(ex2)
→ 一直線だけど力は位置の関数

(ex3)
→ 曲線で、力は一定

曲面の場合、力と速度を求めるのは難しく、入試ではエネルギー保存で求めていく。

垂直抗力は曲面と垂直なので、曲面に沿って滑る物体の速度と常に直交する。



すなわち、垂直抗力の仕事率は0。

エネルギー保存は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{g}\cdot\cancel{\Delta\vec{r}}\ \vec{v}$$

$m\vec{g}$は一定なので

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r}$$

$\vec{g}=(0,-g)$　$\Delta\vec{r}=(x,-h)$ より

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}m0^2 = mgh$$

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

このように、まさつ力や垂直抗力とは異なり、重力は軌跡の始点と終点が指定されると実現する運動の過程に依らず仕事の値があらかじめ決まる。

このように、運動の実現を待たずに、軌跡の始点と終点を決めるだけで仕事の値が決まるような力を保存力という。

動まさつ力 $\vec{f}=-\mu' N\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

速度に依存して変化してしまう。

(μN)

まさつ力などは、力は一定だが、物体の滑る向きによって値が異なるし、作用する他の外力により異なる値をとる。それにしたがい、始点と終点が同じでも通る経路によって仕事は様々な値をとりうる。

※ $-U(\vec{r}) = \int_{*}^{\vec{r}} (f_{cx}\,dx + f_{cy}\,dy + f_{cz}\,dz)$

$-\nabla U(\vec{r}) = (f_{cx}, f_{cy}, f_{cz}) = \vec{f}_c$

保存な $\vec{f}_c$ を

$$U(\vec{r}) \equiv \int_{基準点}^{\vec{r}} (-\vec{f}_c)\cdot d\vec{r}$$

のように導入する。すると、

$$-\frac{d}{dt}U(\vec{r}) = \frac{d}{dt}\left(-U(\vec{r})\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\int_{基準点}^{\vec{r}} \vec{f}_c\cdot d\vec{r}\right\}$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\int_{t^*}^{t}\left(\vec{f}_c\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt\right\}$$
$$= \vec{f}_c\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \vec{f}_c\cdot\vec{v}$$

※置換積分

t	$t^* \to t$
$\vec{r}$	基準点 $\to \vec{r}$

物体にはたらく力が保存力のみの場合、エネルギー保存則より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{f}_c\cdot\vec{v}$$

$\vec{f}_c\cdot\vec{v} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r})$ であったので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})\right) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = 一定$$

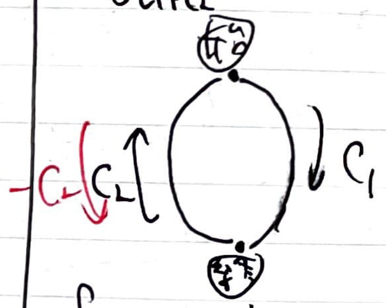
力学的エネルギー保存則という。$U(\vec{r})$ は位置エネルギーとよばれる。

※保存な力の~~一般的な定義~~ 条件

$$\nabla\times\mathbb{F} = 0$$

ストークスの定理より

$$\iint_S (\nabla\times\mathbb{F})\cdot dS = 0$$
$$= \oint_{C_1+C_2} \mathbb{F}\cdot dl$$



$$\oint_{C_1+C_2} \mathbb{F}\cdot dl$$
$$= \oint_{C_1} \mathbb{F}\cdot dl + \oint_{C_2} \mathbb{F}\cdot dl$$
$$= \oint_{C_1} \mathbb{F}\cdot dl - \int_{-C_2} \mathbb{F}\cdot dl$$
$$= 0$$
$$\therefore \oint_{C_1} \mathbb{F}\cdot dl = \int_{-C_2} \mathbb{F}\cdot dl$$

$\mathbb{F}$ の線積分は始点と終点を決めれば途中経路に依存しない。

このように、力$\vec{F}$の仕事率が

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{d}{dt}\left(U(\vec{r})\right)$$

のように変形できるような、物体の位置$\vec{r}$のみの関数が存在すれば、エネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

を

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = 一定$$

のように力学的エネルギー保存則の形式に読み換えることが可能である。

しかし、$\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r})$となるような$U(\vec{r})$をいちいち見つけるのは骨が折れる。さらに、入試においてはそのような$U(\vec{r})$は4種類（弾性エネルギー、地表付近の重力の位置エネルギー、質点間の万有引力の位置エネルギー、点電荷間のクーロン力の位置エネルギー）ぐらいしかない。よって、これら4つの$U(\vec{r})$の表式を導き出し、公式として覚えて力学的エネルギー保存則として解くのが楽ってである。

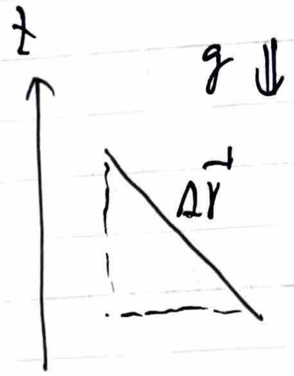
それ以外の力が働く場合（非保存力）は「仕事と運動エネルギーの関係」から解く。

「仕事と運動エネルギーの関係式」と「力学的エネルギー保存則」は数学的に等価である。

地表付近の重力の位置エネルギー

重力のみが仕事をする場合

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{g}\cdot\vec{v}$$



z軸を鉛直上向きに
設定した場合、

$$m\vec{g}\cdot\vec{v} = m(-g)\frac{dz}{dt} = -\frac{d}{dt}(mgz)$$

よって $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgz\right) = 0$

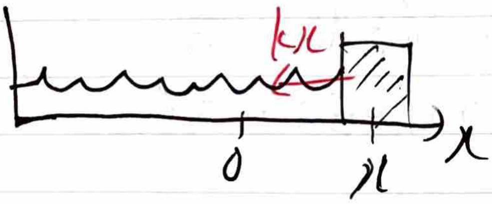
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = 一定$$

$$U(z) = mgz$$

→ 重力場の蓄えるエネルギー、と解釈できる。

弾性エネルギー

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (-kx)v$$



$$= -kx\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

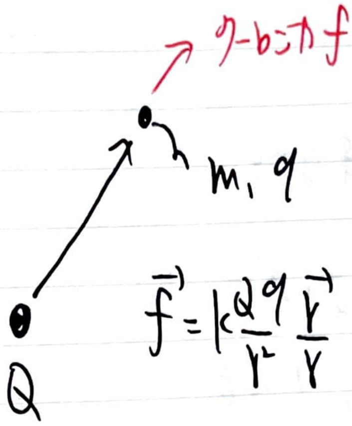
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

物体の位置x、としてみた場合、物体の運動の位置エネルギーを表す。ばねの伸びと見ると、ばねの蓄えるエネルギー、と解釈できる。

クーロン力

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{f}\cdot\vec{v}$$
$$= k\frac{Qq}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{v}$$



$$\vec{f} = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

ここで

$$\frac{d}{dt}\left(k_0\frac{Qq}{r}\right) = k_0 Qq\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\right)$$
$$= -k_0\frac{Qq}{r^3}\vec{r}\cdot\vec{v}$$

よって $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = -\dfrac{d}{dt}\left(k_0\dfrac{Qq}{r}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + k_0\frac{Qq}{r}\right) = 0$$

$\dfrac{1}{2}mv^2 + k_0\dfrac{Qq}{r} =$ 一定 , $U(r) = k\dfrac{Qq}{r}$

万有引力も同じように計算できる

の位置エネルギー

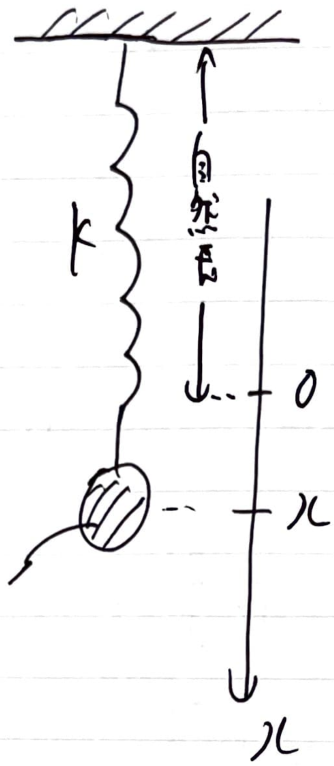
$$r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \times \left(2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}$$

一度導出した経験すればあとは覚えるべきである。

(いずれ導出しよう)

※ このような天才的な所業が成せるのは ~~[illegible]~~ 位置エネルギーが $k\dfrac{qQ}{r}$ であることが予想できていたから!としか思えない。

(ex1) ばねが自然長のとき、静かに放す。



力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

はじめ、$v(0)=0$, $x=0$

なので、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

$$= -\frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{(mg)^2}{2k}$$

のように、運動エネルギー(速度)を位置 x の関数として表すことができる。

物体の速さは $x = \frac{mg}{k}$ のとき最大となり

その値は $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$　$\therefore v = g\sqrt{\frac{m}{k}}$

また $\frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ であるので、物体の運動は

$$mgx - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq \frac{2mg}{k}$$

の区間で実現するので、ばねの最大の伸びは $\frac{2mg}{k}$ である。

※ v-x 図は楕円

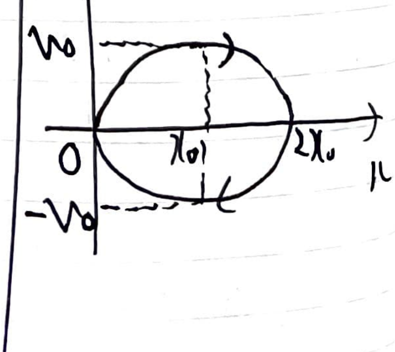
$v_0 = g\sqrt{\frac{m}{k}}$, $x_0 = \frac{mg}{k}$

とおくと、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$$

は

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 = 1$$



No.

Date

ところで、先ほどの物体の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=-kx+mg$$
$$=-k\left(x-\frac{mg}{k}\right)$$

$X=x-\frac{mg}{k}$ と変数変換すると、

$$m\frac{dv}{dt}=-kX$$

両辺に $v\left(=\frac{dX}{dt}\right)$ をかけると、

$$mv\frac{dv}{dt}=-kX\frac{dX}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kX^2\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kX^2\right)=0$$
$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kX^2=\text{一定}\quad\left(X=x-\frac{mg}{k}\right)$$

$-kX=-k\left(x-\frac{mg}{k}\right)=-kx+mg$ なので、

$-kX$ はばねの弾性力と重力の合力である。

$\frac{1}{2}kX^2$ はばねの弾性力ではなく、弾性力と重力のポテンシャルである。

先ほどの例だと、力学的エネルギー保存則として、

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kX^2=\frac{1}{2}k\left(-\frac{mg}{k}\right)^2$$

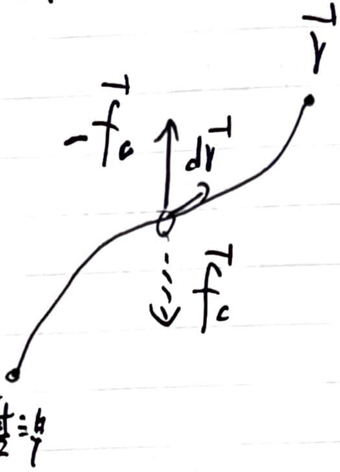
$\frac{mg}{k}$ は定数なので $X=x-\frac{mg}{k}$ の両辺を時間で微分したら $\frac{dX}{dt}=\frac{dx}{dt}=v$

物体の速さの最大値などが、容易に計算できる。

※ ポテンシャルと保存力の関係と解釈

$$U(\vec{r}) = \int_{基準}^{\vec{r}} (-\vec{f_c})\cdot d\vec{r}$$

$-\vec{f_c}\cdot d\vec{r}$ はある微小区間において、保存力に抗う外力$(-\vec{f_c})$を加えたときの微小仕事を表す。すなわち、

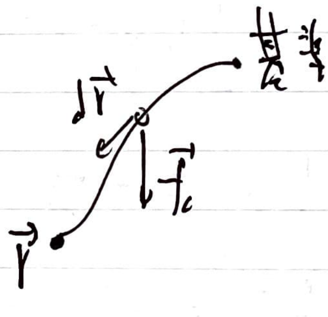


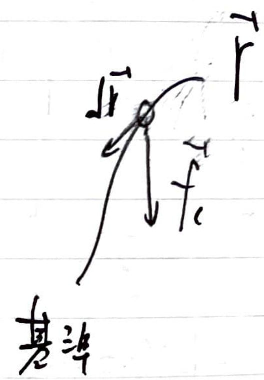
$U(\vec{r})$は保存力に等しい「外力を加えて基準点から$\vec{r}$まで移動させる外力の仕事」に等しい。

あるいは

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{基準} \vec{f_c}\cdot d\vec{r}$$

「物体が$\vec{r}$から基準点にもどるまでに保存力のする仕事」





($\vec{r}$にいることで保存力が$U(\vec{r})$だけの仕事をすることが予約されている)

また、
$$-U(\vec{r}) = \int_{基準}^{(x,y,z)} (f_{cx}, f_{cy}, f_{cz})\cdot(dx, dy, dz)$$
$$= \int_{基準}^{(x,y,z)} (f_{cx}\,dx + f_{cy}\,dy + f_{cz}\,dz)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = f_{cx},\quad -\frac{\partial}{\partial y}U = f_{cy},\quad -\frac{\partial}{\partial z}U = f_{cz}$$

まとめて書くと $\vec{f_c} = -\nabla U(\vec{r})$

保存力が働く
⇓
ポテンシャルが減る
⇓
運動エネルギーが増える

保存力の働く向きはポテンシャルが減少する向きに等しい。

非保存力をどう処理するか？

$\vec{f}_N$ とおく。

解法1　仕事と運動エネルギーの関係を使う

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = W = W_C + W_N$$

保存力　非保存力

解法2　保存力に関してはポテンシャルUを導入して

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right) = W_N$$

力学的エネルギーの変化　非保存力のした仕事

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{f}\cdot\vec{v}$$
$$= (\vec{f}_C + \vec{f}_N)\cdot\vec{v}$$
$$= -\frac{d}{dt}U + \vec{f}_N\cdot\vec{v}$$
$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + U\right)$$
$$= \vec{f}_N\cdot\vec{v}$$

円運動

質点mが円周に沿って運動する条件を調べる。

円の半径r_0、原点Oを円の中心とする。

質点の位置を$\vec r$とすると、円周に沿って質点が運動する条件は

$$|\vec r| = r_0 \quad \text{i.e.} \quad \vec r\cdot\vec r = r_0^2$$

円の方程式
$\vec r=(x,y)$
$x^2+y^2=r_0^2$

両辺を時間で微分すると、

$$2(\vec v\cdot\vec r)=0 \quad \text{i.e.} \quad \vec v\cdot\vec r=0$$

速度$\vec v$と位置$\vec r$が直交する。

~~円運動~~は

$\vec v$の向きを、反時計回りなら正、時計回りなら負とする。

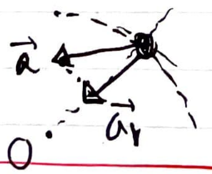
$\vec v\cdot\vec r=0$をさらに時間で微分すると

$$\vec a\cdot\vec r+\vec v\cdot\vec v=0$$

$$\vec a\cdot\vec r=-|\vec v|^2 \qquad \left(|\vec a_r| = \vec a\cdot\frac{\vec r}{|\vec r|}\right)$$

$\vec a_r$は加速度$\vec a$の中心方向の正射影

$$\boxed{\vec a_r = \frac{v^2}{r}\cdot\frac{(-\vec r)}{r}}\quad(向心加速度)$$



← 質点の位置から原点に向く単位ベクトル

つじつま合わせと考えよう。

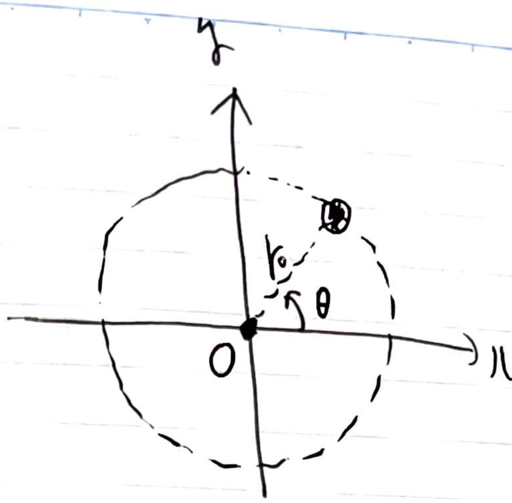
$$\frac{v^2}{r}\cdot\frac{\vec r}{r}\cdot\vec r$$

$$= v^2\frac{\vec r\cdot\vec r}{r^2} \qquad \vec r\cdot\vec r=|\vec r|^2=r^2$$

$$= v^2$$

また、円運動において
質点の位置に関して
角度θに着目することがある。

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$ (角速度)



大学初年度の力学では、極座標における運動方程式を習う。

円弧に沿った変位 $\Delta s = r_0 \Delta\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = r_0 \frac{d\theta}{dt} = r_0 \omega$$

よって、向心加速度は

$$|\vec{a}_r| = \frac{v^2}{r_0} = r_0 \omega^2$$ とも表せる

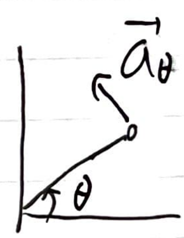
また $\vec{r} = r_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ より $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r_0\omega \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$= v \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

より、$\vec{r}$と$\vec{v}$が直交していることがわかる。

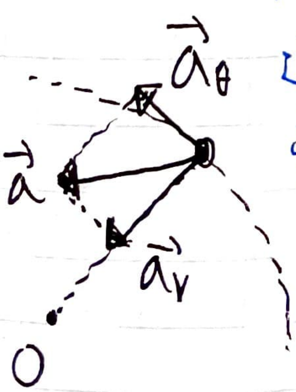
さらに時間で微分すると、

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{r_0\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}_{\text{向心加速度}\ \vec{a}_r\text{。速度の向きを変える}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{速度}v\text{が時間変化（速さ）するときに現れる項}\ \vec{a}_\theta\text{。向きは接線方向。}}$$



向心加速度 $\vec{a}_r$。
速度の向きを変える

速度vが時間変化
（速さ）
するときに現れる項 $\vec{a}_\theta$
向きは接線方向。



向心加速度は速度の向きを変える

円運動するには時々刻々に速度の向きを変える必要がある。よって向心加速度が $\frac{v^2}{r}\ (= r\omega^2)$ のように与えられると、半径 r の円運動を行う。~~...~~

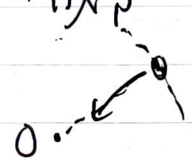
質点の運動方程式 $m\vec{a} = \vec{f}$ の両辺を中心方向に正射影 $\left(-\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right.$ と内積をとる) したとき、

$$m\cdot\frac{v^2}{r} = f_{向心}$$

となれば、円運動を行う。$f_{向心}$ は 向心力 と呼ばれる。我々はこれを 円運動の方程式 とよぶ。円運動を調べるには以下の3点 (12)

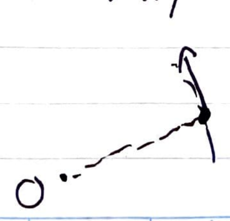
- 円運動をするということは平面内で運動が制約されるということなので、予定されている円軌道を含む平面に垂直な成分の力のつり合い
- 平面内の運動方程式の中心方向の成分

$$m\frac{v^2}{r} = f_{向心}$$



- 平面内の運動方程式の接線方向の成分

$$m\frac{dv}{dt} = f_{接線}$$



運動方程式は3次元のベクトルで表されるので、3つの成分について方程式が必要。すなわち、円運動の方程式以外にあと2つ条件式が必要である。

を検討する必要がある。1つ目と2つ目は容易だが、3つ目をそのままの形で解くのは難しい。

そこで、 $$m v \frac{dv}{dt} = f_{接線} v$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = f_{接線}\cdot v$$ ☺ $\frac{dv}{dt} /\!/ v /\!/ f_{接線}$

となる。すなわち、エネルギー保存則を考えることで、実質的に接線方向の運動方程式を調べたことになる。

まとめると、

① 図を書いて、物体にかかる外力を書く

② 予定されている円軌道（中心、半径）を確認

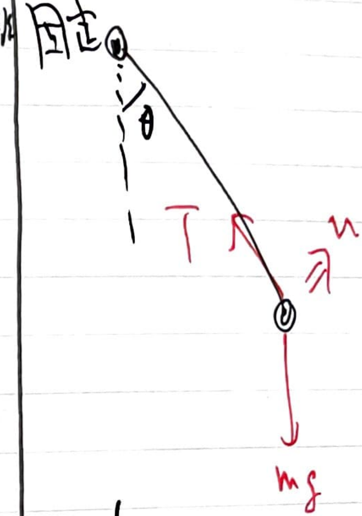
③ 円運動の方程式（中心成分）を書く

④ 必要に応じて

・円軌道を含む平面の法線方向のつり合い

・エネルギー保存則

例えば、



$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$$

θ<<1なら単振動型になるが、そうでないときには解くのは難しい。

Date

複数物体系の基本（運動量保存とエネルギー保存）

◦ 運動量の保存

ニュートンの第2法則

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

（質量 m は物体固有の一定値なので）

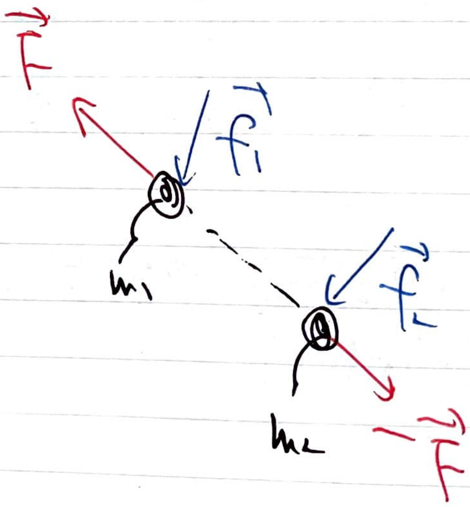
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}$$

$\vec{p} \equiv m\vec{v}$ を質点の運動量と呼ぶ。

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{f}$$

~~[illegible]~~ 受験生は、2物体の運動をおさえていれば十分である。しかし物理の理論としてはN物体系などを扱うこともある。

2物体系を考える。各物体の運動方程式より



$$\cancel{\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) + \frac{d}{dt}(m_2 v_2)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{f}_1 + \vec{F} & \text{①} \\ \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{f}_2 + (-\vec{F}) & \text{②} \end{cases}$$

$\vec{F}$：内力 → 系の内部の物体間に現れる相互作用

①+② より

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

各物体の運動方程式を足し合わせるとともに内力が相殺される。これはニュートンの第3法則（作用・反作用の法則）に起因する。

①②は連立微分方程式なので個々に直接は解けない。

No.

Date

$\vec{f_1}+\vec{f_2}$ が 0になる成分について考える。

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2)=0$$

両辺を時間で不定積分すると、

$$m_1v_1+m_2v_2=一定$$

運動量保存則

$\boxed{\text{外力の働かない方向について、全運動量は保存する。}}$

次にエネルギーについてみていく。①と②に $\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ の内積を作用させて、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right) = \vec{f_1}\cdot\vec{v_1}+\vec{F}\cdot\vec{v_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2\right) = \vec{f_2}\cdot\vec{v_2}-\vec{F}\cdot\vec{v_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)=\vec{F}\cdot(\vec{v_1}-\vec{v_2})+\underbrace{\vec{f_1}\cdot\vec{v_1}+\vec{f_2}\cdot\vec{v_2}}_{\text{外力の仕事率}}$$

となり、運動量のときと比べて、内力の項が相殺されない。

また、内力による仕事率 $\vec{F}\cdot(\vec{v_1}-\vec{v_2})$ より、2体間の相対運動に着目して $\vec{F}$ の仕事(率)を評価すれば良いことがわかる。

摩擦力があるので、常に外力0は厳密には正しくない。地球の地面に固定された座標系において、水平方向への寄与は小さいはずなので、外力は無視できる

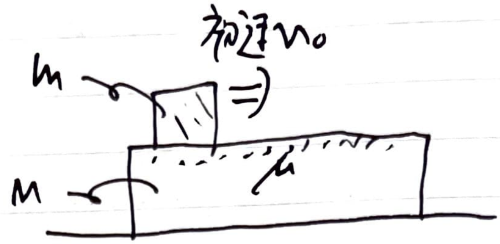
摩擦による

$|\vec{v_1}|=v_1$

$|\vec{v_2}|=v_2$

当たり前だが、作用・反作用の法則はスカラー量である仕事(エネルギー)に適用できない

(ex1) 滑らかな水平な床の上に台を置き、その上を物体が初速v_0で滑る。台と物体間の動摩擦係数をμとする。



水平方向に着目すると、2体系の外力は0なので
(に対する)
運動量保存則が成り立つ。

小物体が台に対して静止したときの両物体の速さをVとすると、

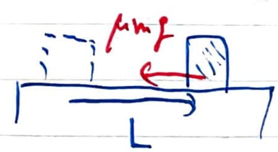
$$mV + MV = mv_0 + M\cdot 0 \quad \therefore V = \frac{m}{m+M}v_0$$

エネルギー保存則より、板に対して滑った距離Lは、

$$\left(\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2\right) = -\mu mg\cdot L$$

$$-\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 = -\mu mg\cdot L$$

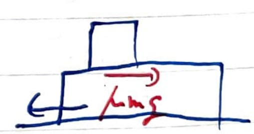
$$L = \frac{M}{m+M}\frac{v_0^2}{2\mu g}$$



台に対する小物体の相対運動

$(-\mu mg)\cdot L$

もしくは



小物体に対して台が右にLすすんだ

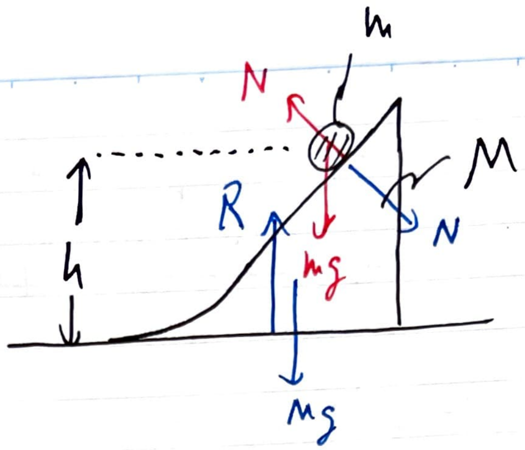
$\mu mg\cdot(-L)$

なお、この場合は各物体について、等加速度運動になるので、時間追跡も可能である。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$

$$= \underbrace{\vec{F}\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}_{\vec{F}\cdot(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)} + \vec{f}_1\vec{v}_1 + \vec{f}_2\vec{v}_2$$

(ex2) 滑らかな水平な床上に、滑らかなスロープ面をもつ台をおき、高さhのところから台に小球をのせて静かに放す。



この2物体系において内力はN(垂直抗力)である。外力は重力mg、Mgと床からの垂直抗力Rである。

水平方向には外力がないので水平方向の運動量保存則から（小物体が水平面に達したときの台と小物体の速さをV, vとする）

$$m\cdot(-v)+M\cdot V=0$$

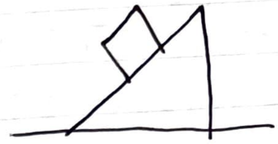
外力から考える。

次に、エネルギーについて見ていく。まず、重力について。台は水平方向にしか動かないので、仕事0。床からの垂直抗力Rによる仕事も0。小物体の重力については位置エネルギーを導入する。
次に、内力について。垂直抗力Nは各々の物体の速度とは直交しないが、一方の物体の他方に対する相対速度はNと直交する。よって、内力による項は0。

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgh$$

2式を連立して

$$v=\sqrt{\frac{M}{m+M}2gh},\quad V=\sqrt{\frac{m^2}{M(m+M)}2gh}$$



このような、~~斜~~個々の運動が単純なケースでは、各々の物体について運動方程式を立てて束縛条件と連立して解けた。

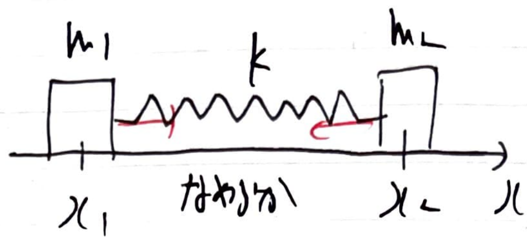
しかしこのようなケースだと運動方程式を解くのは難しい。

(よって) 個々の運動が単純（三角台や滑車など）な場合はma=Fでいけるが、複数物体系は基本的には運動量保存則とエネルギー保存則で解く。

※他にも、重心運動と相対運動に注目する設定もある(また)

2物体系の基本（運動量とエネルギー）→ 運動量と力積 → 衝突 → 重心 and 相対運動

(ex3) m_1に初速v_0を与えた。ばねが最も縮んだときの縮みと速度を求めよ。



系の水平方向の外力は0より、水平方向の運動量保存則より。（ばねが最も縮んだとき、ばねの縮み $s = l-(x_2-x_1)$ の両辺をtでビブンすると、$\frac{ds}{dt} = -v_2+v_1=0$ ∴ $v_1=v_2=u$）

$$m_1u+m_2u = m_1\cdot v_0 + m_2\cdot 0$$

∴ $u = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_1\cdot u^2 + \frac{1}{2}m_2u^2+\frac{1}{2}k\cdot s^2 = \frac{1}{2}m_1\cdot v_0^2 + \frac{1}{2}m_2\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2$$

∴ $s^2 = \frac{1}{k}\{m_1v_0^2-(m_1+m_2)u^2\}$

$= \frac{1}{k}\left(m_1v_0^2 - \frac{m_1^2}{m_1+m_2}v_0^2\right)$

$= \frac{1}{k}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_0^2$

∴ $s = v_0\sqrt{\frac{1}{k}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}$

一般に $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right) = \vec{F}\cdot(\vec{v}_1-\vec{v}_2)+\vec{f}_1\cdot\vec{v}_1+\vec{f}_2\cdot\vec{v}_2$

$\vec{F}\cdot(\vec{v}_1-\vec{v}_2) = -\frac{dU}{dt}$ を満たすUが存在すれば、

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+U}_{\text{系の力学的エネルギー}}\Big) = \underbrace{\vec{f}_1\cdot\vec{v}_1+\vec{f}_2\cdot\vec{v}_2}_{\text{外力の仕事率}}$$

ばねののび y は

$y=(x_2-x_1)-l$

$m_1\frac{dv_1}{dt}=ky$

$m_2\frac{dv_2}{dt}=-ky$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$

$=kyv_1-kyv_2$

$=ky(v_1-v_2)$

ここで、$y=(x_2-x_1)-l$ の両辺をtでビブン

$\frac{d}{dt}y = v_2-v_1$

よって、(与式)

$=-ky\frac{dy}{dt}$

$=-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ky^2\right)$

∴ $\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}ky^2$

$=\text{const.}$

しかし、これが1体系でのUと一致するかは、数学的には非自明（Fが2体間距離で決まるなら一致）

No.
Date

衝突とはね返り係数，分裂

系全体に外力が働いていない(あるいは働いていても無視できるほど小さい)方向に対して，これまで同様運動量保存則が使える。

しかし，撃力の詳細は知ることができないので，エネルギーについて知ることができない。一般に，エネルギーも保存するかどうか分からない(変形を考慮すると，衝突の際に，垂直抗力のする仕事が相殺しない)。

入試においては，必ず衝突のモデルが与えられる。

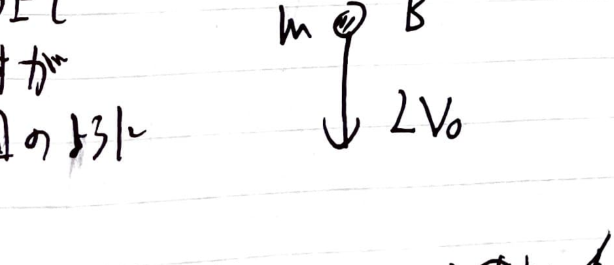
(ex) 1体となって動く，はね返り係数が与えられる

重力による力積は，撃力のものと比べて無視できる。

力の詳細が不明，ということは運動方程式が分からない。

はね返り係数e=1のときはエネルギーは保存されるが，特殊なケースと考えた方がよさそうである。

(ex1)



なめらかな水平面上で運動していた物体がAとBに分裂して図のように運動した。

分裂に際して，外力の作用がないとすると系の運動量が保存されるので，

$$\begin{cases} 2m \cdot V\cos\theta + m\cdot 0 = 3m\cdot V_0 \\ 2m\, V\sin\theta + (-m\cdot 2V_0) = 3m\cdot 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} V = \dfrac{\sqrt{13}}{2}V_0 \\ \tan\theta = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

はね返り係数（反発係数）

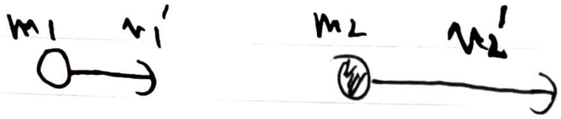
ぶつかる速さの何倍ではね返るか？

はね返り係数は現象論的な数値である。

衝突前：

$(v_1 > v_2)$

衝突後：



$(v_2' > v_1')$

はね返り係数　$e = \dfrac{|v_1' - v_2'|}{|v_1 - v_2|}$

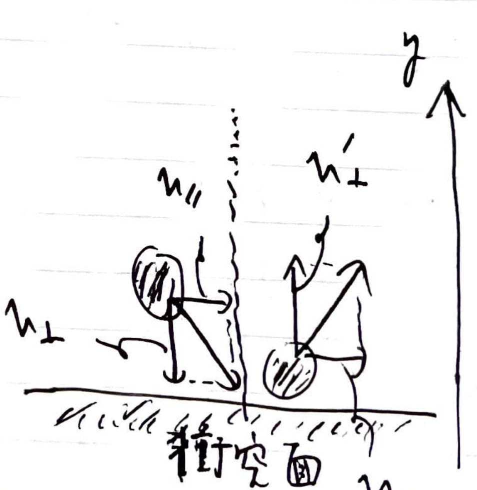
衝突前後で相対速度が逆転することを踏まえると、

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \quad \text{i.e.} \quad \boxed{v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2)}$$

入試ではこの形で覚えた方が実用的である。

※注意

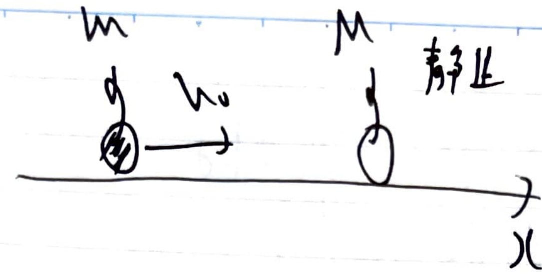
衝突面に対して斜めの場合、衝突面の法線成分のみにしかはね返り係数は定義されない。

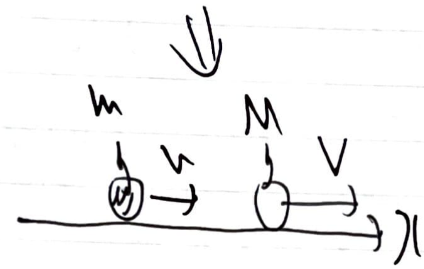


$$v_{\perp}' - 0 = -e(-v_{\perp} - 0)$$

$$\therefore v_{\perp}' = e v_{\perp}$$

(ex2) なめらかな床の上にある2物体の運動を考える。衝突後の各物体の速度と、系全体の失った力学的エネルギーを求めよ。はね返り係数をeとする。





衝突後の各物体の速度をv, Vとおいて運動量保存則より、

$$mv + MV = mv_0 + M\cdot 0$$

はね返り係数はeなので、

$$v - V = -e(v_0 - 0)$$

$$\therefore v = \frac{m - eM}{m+M}v_0 \ , \ V = \frac{(1+e)m}{m+M}v_0$$

また、力学的エネルギーの損失量は

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\cdot v_0^2 - \left(\frac{1}{2}m\cdot v^2 + \frac{1}{2}M\cdot V^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot v_0^2 - \frac{m\cdot(m-eM)^2 + Mm^2(1+e)^2}{2(m+M)^2}v_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2\left\{1 - \frac{m^2 - \cancel{2emM} + e^2M^2 + M\cdot m + \cancel{2emM} + e^2mM}{(m+M)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2\,\frac{M\cdot m + M^2 - e^2M^2 - e^2m\cdot M}{(m+M)^2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^2)\frac{Mm}{M+m}v_0^2$$

vについて「速さ」を問われたら、mとeMの大小関係が分からない場合は

$$|v| = \frac{|m - eM|}{m+M}v_0$$

とつけなければならないことに注意。

$(1-e^2)(m+M)M$

重心運動、相対速度 と 重心系は 飛ばしてもらって 構わない。

一般に、

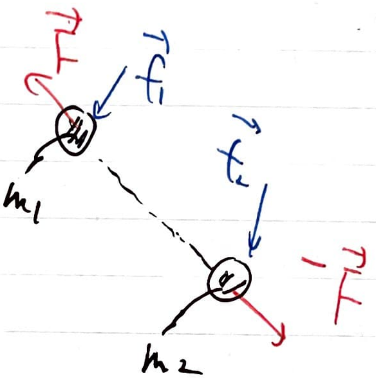
$e = 1$ … エネルギーは保存される
（弾性衝突）

$1 > e \geqq 0$ … エネルギーは1部、あるいは($e=0$)
の場合 完全に失われる。
（非弾性衝突）

重心運動、相対運動

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1}) = \vec{F} + \vec{f_1} \quad \cdots ①$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v_2}) = -\vec{F} + \vec{f_2} \quad \cdots ②$$



① + ② より

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}) = \vec{f_1} + \vec{f_2} \quad \cdots ③$$

ここで、2体系の質量中心（重心）を

$$\vec{r_c} \equiv \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

と定義する。代数的には、2物体を結ぶ線分を質量の逆比に内分する点である。
これを時間で微分すると

$$\frac{d\vec{r_c}}{dt} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

これを重心速度 $\vec{v_c} \equiv \frac{d\vec{r_c}}{dt}$ と呼ぶ。分母は全質量の和、分子は全運動量を表す。これより ③ は

$$(m_1 + m_2)\frac{d\vec{v_c}}{dt} = \vec{f_1} + \vec{f_2} \quad \cdots ④$$

$e=0$ のときは
完全非弾性衝突
（1体となって動く）

・教えるときは初めから
$\vec{f_1}=0$、$\vec{f_2}=0$
の場合でいいと
思う

※
3体以上の場合はここでの議論は適用しないので、物理において普遍的な理論であるとはいえない。
（そもそも相対運動を3体でという定義でもよいか？）

1物体のときの
$m\vec{a} = \vec{f}$ と
同じ形!!

$\vec{f_1}+\vec{f_2}=\vec{0}$ すなわち系にはたらく外力が0のとき、③より全運動量は保存される。これは④より

$\vec{v_c}$ = 一定であることと同値である。

外力0 ⟺ 運動量保存 ⟺ 重心速度一定

「①かつ②」により2物体系の運動が分かる。③は「①かつ②」の必要条件なので、③だけを調べても2物体系を調べつくしたことにはならない。そこで

$\frac{①}{m_1}-\frac{②}{m_2}$ を考える。

$$\frac{d}{dt}(\vec{v_1}-\vec{v_2})=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F}+\frac{1}{m_1}\vec{f_1}+\left(-\frac{1}{m_2}\vec{f_2}\right)\cdots④$$

一般に、内力は2体間の距離（位置）$\vec{r_1}-\vec{r_2}$で決まる。外力の項が単純だった場合④は$\vec{r_1}-\vec{r_2}$について解ける。

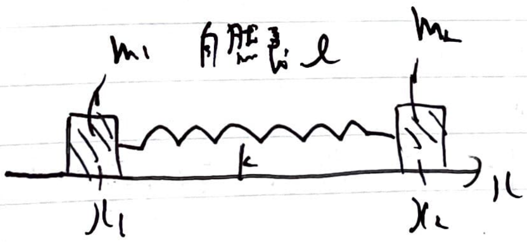
「①かつ②」⟺「③かつ④」

次④は、$\mu=\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{-1}$ とおくと、

$$\mu\frac{d}{dt}(\vec{v_1}-\vec{v_2})=\vec{F}+\frac{\vec{f_1}}{m_1}-\frac{\vec{f_2}}{m_2}$$

とかけ、μを換算質量と呼んだりする。

(ex1)



ばねの自然長lからの伸びを $s=(x_2-x_1)-l$ とすると、

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=k\cdot s,\quad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k\cdot s$$

両辺引くと

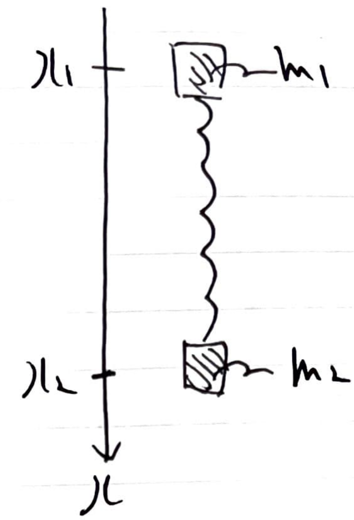
$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2)=k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)s$$

$$\frac{d}{dt}s=-\frac{d}{dt}(x_1-x_2)\ \text{より}\quad \frac{d^2}{dt^2}s=-k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)s$$

これは単振動型の方程式であり、初期条件より時間追跡できる。

※次の例題で見るが、例えば外力として重力がはたらいているときも、外力による項は相殺される。

(ex2) 先程の問題を鉛直下向きに x 軸をとることにする。



$s = (x_2 - x_1) - l$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k \cdot s + m_1 g \quad \cdots ①$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k \cdot s + m_2 g \quad \cdots ②$$

① + ② より

$$\cancel{(m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = (m_1 + m_2) g}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = (m_1 + m_2) g$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x_c}{dt^2} = (m_1 + m_2) g$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

これより、重心は重力加速度による自由落下運動となる。

$\frac{①}{m_1} - \frac{②}{m_2}$ より

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\{\underbrace{(x_2 - x_1) - l}_{= s}\}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} s = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) s$$

となり、重力による効果が消えていることがわかる。

重心(相対)運動エネルギー

※簡単のため、1次元を考える

2物体の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

は、重心速度 $V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$，相対速度 $u = v_1 - v_2$

全質量 $M = m_1 + m_2$，換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を用いて、

$K = \frac{1}{2}M \cdot V_c^2 + \frac{1}{2}\mu \cdot u^2$ ともかける。

第1項を重心運動エネルギー 第2項を相対運動エネルギーと呼ぶ。運動量が保存するとき重心速度が同じなので、2体の運動エネルギー変化は $\frac{1}{2}\mu u^2$ に起因する。

※確かめてみよう

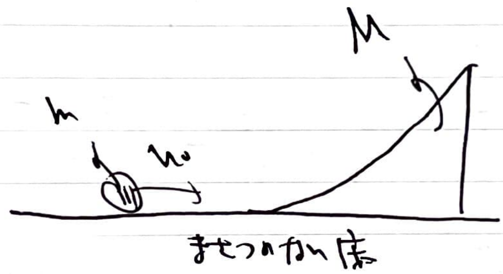
$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1^2v_1^2 + \cancel{2m_1m_2v_1v_2} + m_2^2v_2^2 + m_1m_2v_1^2 - \cancel{2m_1m_2v_1v_2} + m_1m_2v_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1v_1^2(m_1+m_2) + m_2v_2^2(m_1+m_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

(ex3) 小物体mが台の上をのぼり、台上で一瞬静止するときの小物体の高さHを求めよ。



また、水平面上にもどったときの両物体の速度 v, V を求めよ。
（v：小物体、V：台）

エネルギー保存則より（一瞬静止するときの両物体の速度 u） 入試では常識

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv_0+M\cdot 0}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_0-0)^2$$

運動量保存則より等しい。

$$= \frac{1}{2}\cdot(m+M)\left(\frac{mu+Mu}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M\cdot m}{M+m}(u-u)^2 + mgH$$

$$\therefore\ mgH = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 \quad \therefore\ H = \frac{M}{2g(m+M)}v_0^2$$

次に v, V を求める。運動量保存則より

$$m\cdot v_0 = m\cdot v + M\cdot V \quad \cdots\cdots (1)'$$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv_0+M\cdot 0}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v_0-0)^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv+MV}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}(v-V)^2$$

水平面にもどったとき $v<V$ より $v_0 = -(v-V)$ ……(4)' ⇒ (1)'(4)' を連立

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

は、数学的な恒等式、と認識しておくべきである。

物理的な意味にこだわりすぎてはならない

※ 結果を覚えるのではなく、プロセスを覚える。計算を省略するのはその後

通常は

~~$mv_0 = mv + MV$~~

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + mgH \\ \left(u = \frac{m}{m+M}v_0\right) \end{cases},$$

$$\begin{cases} mv_0 = mv + MV \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \end{cases}$$

$$v - V = -(v_0 - 0)$$

⇒ はね返り係数1と考えよ

重心系

2体問題では、相対運動の代わりに重心系における2体の運動に注目してもよい。

重心系…重心に固定した座標系

重心系における各物体の位置と速度をそれぞれ $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ および $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ と表す。

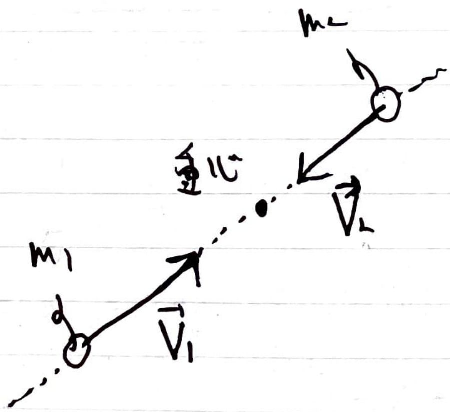
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_c \\ \vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_c \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c \\ \vec{V}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c \end{cases}$$

定義より明らかだが、重心系において重心は原点に静止しているので

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \vec{0}, \qquad m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 = \vec{0}$$

$$(\vec{V}_1 /\!/ \vec{V}_2, \ \vec{R}_1 /\!/ \vec{R}_2)$$

→ 2物体は常に重心系の原点（重心）に関して反対側にあり、原点と2物体を通る直線に沿って対称に運動している。



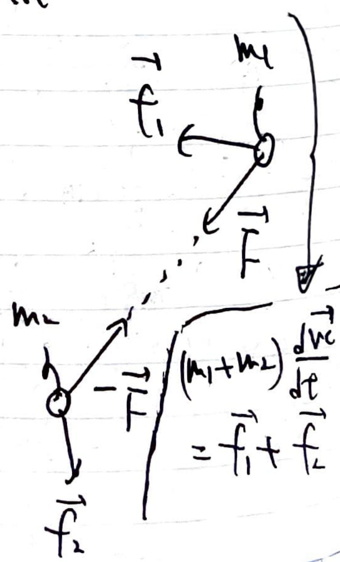
これまでの実験室系での議論より、重心位置は

$$(m_1+m_2)\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad \therefore \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

にしたがって運動しているのであった。座標系での話を思い出してほしいが、重心系にいる立場からは、（着目する物体の質量をmとすると）重心系での運動方程式の右辺に見かけの力（慣性力）

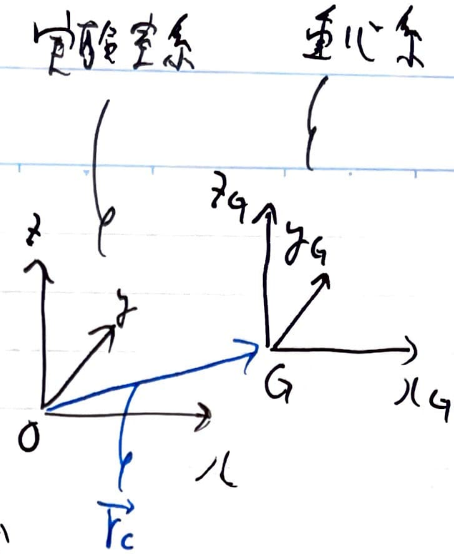
実験室系では

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F} + \vec{f}_1$$
$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = -\vec{F} + \vec{f}_2$$



$$-m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = -m\cdot\frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

が現れる。



$$m_1\frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}+\vec{f}_1-m_1\frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

$$= \vec{F}+\frac{m_2\vec{f}_1-m_1\vec{f}_2}{m_1+m_2} \quad \cdots ①$$

$$m_2\frac{d\vec{V}_2}{dt} = -\vec{F}+\vec{f}_2-m_2\cdot\frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

$$= -\vec{F}+\frac{m_1\vec{f}_2-m_2\vec{f}_1}{m_1+m_2} \quad \cdots ②$$

$\frac{①}{m_1}-\frac{②}{m_2}$ より、

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1-\vec{V}_2) = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F}+\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\frac{m_2\vec{f}_1-m_1\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F}+\frac{\vec{f}_1}{m_1}+\left(-\frac{\vec{f}_2}{m_2}\right)$$

$\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{R}_1-\vec{R}_2$, $\vec{F}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\vec{F}(\vec{R}_1-\vec{R}_2)$ より、上の式は本質的に相対運動方程式と同じ形をしていることが分かる。

重心系において、重心運動エネルギーは0なので、全運動エネルギーは相対運動エネルギー

$$K_{in}=\frac{1}{2}\mu u^2=\frac{1}{2}m_1\vec{V}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\vec{V}_2$$

相対速度 $\vec{u}=\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{V}_1-\vec{V}_2$

$$\vec{r}=\vec{r}_c+\vec{r}_G$$

$$\vec{r}_G=\vec{r}-\vec{r}_c$$

$$m\ddot{\vec{r}}_G=m\ddot{\vec{r}}-m\ddot{\vec{r}}_c$$

$$m_1\frac{d\vec{V}_1}{dt}=\vec{F}+\vec{f}_1-m_1\frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

$$=\vec{F}+\frac{m_2\vec{f}_1-m_1\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

$$m_2\frac{d\vec{V}_2}{dt}=-\vec{F}+\vec{f}_2-m_2\frac{\vec{f}_1+\vec{f}_2}{m_1+m_2}$$

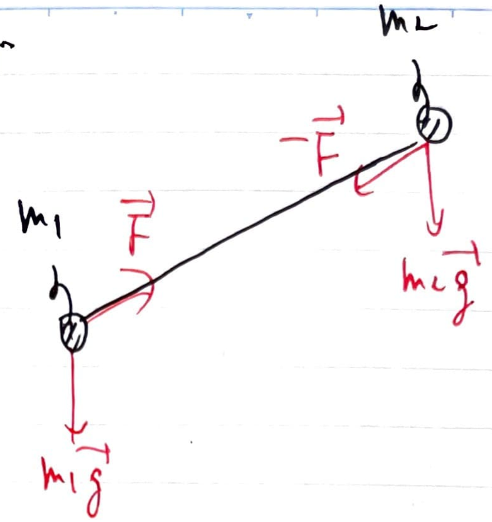
$$=\vec{F}+\frac{m_1\vec{f}_2-m_2\vec{f}_1}{m_1+m_2}$$

K_{in}

$$=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2-(m_1v_1+m_2v_2)\cdot v_c$$

$$=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2$$

(ex) 伸縮しない糸につながれた2物体の放物運動を考える。糸はたるまないものとする。糸の張力を $\vec{F}$ とする。



① 実験室系

$$m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt} = \vec{F} + m_1\vec{g} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$m_2\frac{d\vec{v_2}}{dt} = -\vec{F} + m_2\vec{g} \quad \cdots (2)$$

(1) + (2) より、

$$\cancel{(m_1+m_2)\frac{d(\vec{v_1}+\vec{v_2})}{dt} = (m_1+m_2)\vec{g}}$$

$$(m_1+m_2)\frac{d\vec{v_c}}{dt} = (m_1+m_2)\vec{g}$$

$\frac{(1)}{m_1} - \frac{(2)}{m_2}$ より、

$$\frac{d}{dt}(\vec{v_1}-\vec{v_2}) = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{F}$$

② 重心系

$$m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \left(-m_1\frac{d\vec{v_c}}{dt}\right)$$

$$= \vec{F} + m_1\vec{g} - m_1\vec{g}$$

$\therefore m_1\frac{d\vec{v_1}}{dt} = \vec{F}$ 重心から m_1 までの距離が一定なので $\vec{F}$ を向心力とする等速円運動である。

運動量と力積

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

両辺を時間について t_1~t_2 で積分

$$m\vec{v}(t_2)-m\vec{v}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \quad \cdots ①$$

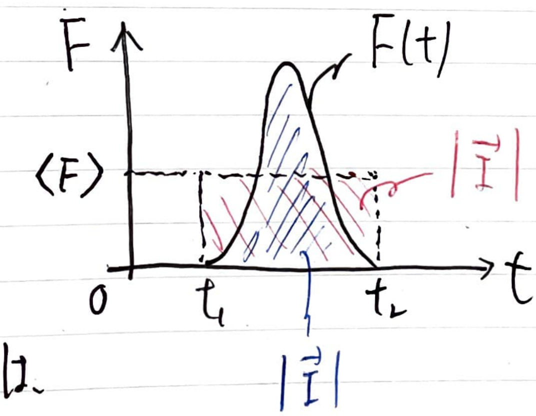
$$\vec{I}\equiv\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt$$

を物体の受けた力積という。

なお、$t_1 \leq t \leq t_2$ の平均の力を$\langle\vec{F}\rangle$とおくと

$$\vec{I}=\langle\vec{F}\rangle\cdot(t_2-t_1)$$

また力積は F-t グラフの面積に相当する。



運動量と力積の関係①は、力積によって運動量変化が分かるという因果関係を表す。

しかし①の両辺を質量mで割ると（速度の変化）＝（加速度の時間積分）となる。このように①は新しい情報を何も含んでいない。入試においては「力積」を問われた場合のみ、①の関係式を使って運動量変化から導くか、F-t グラフの面積から直接求める、ということになる。

力積 → 原因

運動量変化 → 結果

※しかし、①の関係を第一原理だとするべき、という声も見かける。