第XI章　電子の相対論的な理論

特殊相対性理論

本章の目的は特殊相対性理論[1]と整合する量子力学を作り上げることである。そこで本章の内容に入る前に、まずは特殊相対論の概要について簡単に触れる。

特殊相対性理論では、次の二つの前提が要請される。

特殊相対論における前提

- 光速度不変の原理 :どの慣性系から見ても光の速さは一定である。
- 特殊相対性原理: どの慣性系から見ても物理法則は不変である。

上述の光速度不変の原理[2]と特殊相対性原理[3]を出発点として、特殊相対性理論が構築される。

例えば、座標が (x, y, z) で時間が t である慣性系 S に対して、x 方向に速さ V で動く慣性系 S' を考えよう。S' では座標を (x', y', z')、時間を t' で表すことにする。Newton の力学の理論では、これら 2 つの慣性系はガリレイ変換によって

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

のように結びつけられ、また運動方程式の形が不変であるのだった。しかし、この変換は特殊相対性理論と整合しない。何故ならば、(x, y, z) と (x', y', z') を原点から出発した光の到達面と見做すと

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}(x - Vt) = \frac{dx}{dt} - V \neq \frac{dx}{dt}$$

となり、光速が二つの慣性系から見て異なってしまっているからである。これは、時間がどの慣性系でも同じように流れているもの、すなわち絶対的な量と見做していたことに起因する。そこで、時間も座標と同じく、慣性系によって値が変わるもの、すなわち相対的な量と見なすことにする。これが Lorentz 変換において重要な点である。

光速不変の原理から、慣性系 S と S' を結びつける変換式である Lorentz 変換が導かれる[4]。

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

ここで、γ は Lorentz 因子と呼ばれるものであり、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

[1]相対性理論には特殊相対性試論と一般相対性理論があるが、本項で相対性理論（或いは相対論）と言うとそれは特殊相対性理論のことを指す。

[2]「光の速さは光源の運動状態に依らず一定値をとる」ということだけを前提にすれば、これと特殊相対性原理から光速度不変の原理が導かれる。その意味では、光速度不変の原理と特殊相対性原理は独立した前提ではない。

[3]数学的にいうと、Lorentz 変換と呼ばれる座標変換に対して基礎方程式が形を変えないことに相当する。

[4]マクスウェル方程式が不変であることから導出する方法も有名である。

である。上の変換によって観測される光速が不変であることは以下のように確認できる。$t=0$ の瞬間には S 系と S' 系の原点が一致していたとする。$t=0$ の瞬間に原点から光が放たれたとすると、光の到達面は

$$x^2+y^2+z^2=(ct)^2$$

で表せる。Lorentz 変換を (x,y,z) について解き、上式に代入してやると

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$$

が成り立つことがわかる。これは、$t=t'=0$ に原点から出発した光が、2 つの座標系から見て同じ速度 c で進んでいることを意味している。

66　一個の粒子の相対論的な扱い（※相対論的力学を追加）

一個の粒子に関する問題を考える。空間と時間を同等に扱うために、次のような記法を導入する。

$$(x^0,x^1,x^2,x^3)=(ct,x,y,z)=(ct,\boldsymbol{x})$$

相対論において、ローレンツ変換に伴う物理量の変換が一目で分かるような記法を導入した方が便利である。物理量は、ローレンツ変換に対する変換性によって、スカラー、共変ベクトル、反変ベクトルなどといったものに分類することができる。

共変ベクトル a^μ には対になる反変ベクトル a_μ がある[5]。特殊相対論の舞台であるミンコフスキー空間においては、以下のような関係を持つ。

$$a^0=a_0,\quad a^1=-a_1,\quad a^2=-a_2,\quad a^3=-a_3 \tag{1}$$

ここで、以下で定義される基本テンソル

$$g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1,\quad g^{\mu\nu}=0\ \ (\mu\neq\nu) \tag{2}$$

を用いると、(1) は

$$a^\mu=g^{\mu\nu}a_\nu \tag{3}$$

と書ける[6]。$g^{\mu\nu}$ は計量と呼ばれるものであり、(2) はミンコフスキー空間における関係式である[7]。

ミンコフスキー空間では、内積は以下のようなものである。

$$a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3=a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu$$

非相対論的な力学の舞台であるユークリッド空間においては、直交変換（空間回転など）に対して内積（つまりベクトルの大きさと角度）が不変であった。ミンコフスキー空間では、Lorentz 変換によって上記の 4 元ベクトルの内積が不変となる。

---

[5] 現代の習慣と逆である。既習であれば少々混乱するかもしれない。

[6] 本稿では、教科書にのっとりアインシュタインの和の規則を用いる。これは、一つの項の中に同じ添字を持つ文字の積が出てきたら、和をとるというものである。例えば、$\sum_\mu a^\mu b_\mu$ は、$a^\mu b_\mu$ と書かれる。

[7] Newton 力学の舞台であるユークリッド空間においては、計量は

$$g^{11}=g^{22}=g^{33}=1,\quad g^{\mu\nu}=0\ \ (\mu\neq\nu)$$

のようになる。これより、反変ベクトルと共変ベクトルは等しくなり、内積は

$$a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a^\mu b_\mu=a_\mu b^\mu$$

である。

ここで、相対論を量子論に持ち込む前に、相対論を Newton 力学と融合した相対論的力学について簡単に触れる。まず、以下の量は Lorentz 変換に対して不変であり、固有時と呼ばれる[8]。

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu} = \frac{1}{c}\sqrt{(cdt)^2 - d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^2}dt = \frac{1}{\gamma}dt$$

また、運動量は次の 4 元ベクトルで表される。

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) = \left(p^0, -\boldsymbol{p}\right)$$

各成分は静止質量 m と 4 元座標を用いて

$$p_\mu = m\frac{dx_\mu}{d\tau}$$

と定義される[9]。

ここで、特殊相対論と整合させた Newton の運動方程式を導入する。

$$m\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = F_\mu$$

ここで、$F\mu$ は 4 元力と呼ばれる量である。

次に、エネルギーと力の関係を見るために、上記の運動方程式を変形する。上式の両辺に 4 元速度の共変成分をかけると

$$m\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = \frac{dx^\mu}{d\tau}F_\mu$$

ここで、左辺は

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right)^2\right\}\right)\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\{\gamma^2c^2 - \gamma^2\boldsymbol{v}^2\}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}c^2\right) = 0\end{aligned}$$

となり[10]、右辺は

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}F_\mu = F_0\frac{d(ct)}{d\tau} - \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = cF_0\gamma - \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$$

となるので、$\dfrac{dp_0}{d\tau} = F_0$ の関係を用いると

$$\frac{d}{d\tau}(cp_0) = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}$$

$\gamma^{-1}\boldsymbol{F}$ を Newton 力学における力とみなすと右辺は仕事率そのものである。従って、cp_0 をエネルギー E と解釈しよう。

---

[8] $(dx, dy, dz) = (0, 0, 0)$ が成り立つとき、$d\tau = dt$ である。これは、観測される物体と共に運動する座標系で観測していることを意味する。

[9] 4 元運動量の定義より、3 次元の運動量 p と速度 v は

$$\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = m\frac{dt}{d\tau}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \gamma m\boldsymbol{v}$$

のように結びつけられる。

[10] 一つ目の式変形は逆を辿ると簡単に確かめられる。

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{dx_\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\frac{dx_\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2x_\nu}{d\tau^2}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}$$

今、4元運動量は $(E/c, -\boldsymbol{p})$ となることがわかった。次に、このエネルギー E の表式を導いてみよう。運動量のノルムを計算すると

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2$$

となる。ここで、

$$p_\mu p^\mu = m^2 \frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = m^2 c^2$$

となることから

$$E = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2}$$

であることがわかる[11]。

次に、上記の力学変数を量子化する。シュレーディンガー表示では、運動量は

$$p_r = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

である。x_r は空間座標である。これを相対論に持ち込んだ形が

$$p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\Big) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{4}$$

である。上式は反変ベクトルで表されており、共変ベクトルでは

$$p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\Big) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

と表される。ここで、p^0 は粒子のエネルギー E を光速 c で割ったものという物理的意味を持つのであったので、$E \to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$、$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ という置き換えをしたことになる。

67　電子に対する波動方程式

本節では、特殊相対論と整合する波動方程式を導入する。特殊相対論において、運動量 $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ を持つ自由粒子のエネルギーは $E = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2}$ で与えられるのであった。そこで、エネルギー固有値が上式になるようなハミルトニアン

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2}$$

を考えよう。これを単純に、シュレーディンガー方程式 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ に代入すると、波動方程式

$$\big\{p_0 - \big(m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\big)^{1/2}\big\}\psi = 0 \tag{5}$$

[11] $m = 0$ とすると $E = c\boldsymbol{p}$ が得られるが、これは有名な光子（photon）の運動量とエネルギーの関係式である。また、エネルギーを以下のように Taylor 展開する。

$$E = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2} = c\sqrt{(mc)^2 + \gamma^2 m^2 \boldsymbol{v}^2} = mc^2\sqrt{1 + \gamma^2\Big(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\Big)^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2 - \boldsymbol{v}^2}} = mc^2\sqrt{\frac{c^2}{c^2 - \boldsymbol{v}^2}}$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \big(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\big)^2}} = mc^2\Big\{1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\Big)^2 + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\Big)^4\Big)\Big\}$$

高次の項は無視すると

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$$

が得られる。 第一項は静止エネルギーで、第二項は Newton 力学での運動エネルギーに相当する。

を得る。しかし、上式は根号を含むため次の点において都合が悪い。根号の項を Taylor 展開するとわかるが、(5) は空間に関する高次の微分を含んでいる。そのため、時間と空間が対称な形になっておらず、Lorentz 変換に対してそれぞれが異なる変換性を持つことになるため、このままでは相対論に適用できない。

そこで、(5) の両辺に左から $\left\{p_0+\left(m^2c^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2\right)^{1/2}\right\}$ を掛けることで、式中に根号を含まない形にしてみると、

$$\left\{p_0^2-m^2c^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2\right\}\psi=0 \tag{6}$$

となる。これはクライン-ゴルドン（Klein-Gordon）方程式と今日呼ばれるものである。4 元微分 $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\dfrac{\partial}{\partial(ct)},\boldsymbol{\nabla}\right)\equiv\partial_\mu$ を用いて (6) を表すと、

$$\left\{\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu+m^2c^2\right\}\psi=0$$

となる。内積が Lorentz 変換に対して不変であることから、Klein-Gordon 方程式は相対論的に不変（Lorentz 変換に対して不変）であることがわかる。また、(6) を満たす解として

$$\psi=Ne^{-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})/\hbar}$$

を考える。E は粒子のエネルギーである。これを (6) に代入すると、

$$E^2=c^2(m^2c^2+\boldsymbol{p}^2)$$

となる。従って、$E=+c\sqrt{(mc)^2+\boldsymbol{p}^2}$ を解に持つ。しかし、これに加えて $E=-c\sqrt{(mc)^2+\boldsymbol{p}^2}$ という負の値まで (6) の解に含まれることになる。後で議論する Dirac 方程式も負の解を持つことになるのだが、この問題については 73 節で触れる。

また、(6) は時間微分について 2 次であるが、時間微分について 1 次になるような方程式を、次の式を出発点にして見出す。

$$\left\{p_0-\alpha_1p_1-\alpha_2p_2-\alpha_3p_3-\beta\right\}=0 \tag{7}$$

ここで、α_i $(i=1,2,3)$ と β は運動量 p と交換するものとし、以下の関係式を満たすものとする。

$$\alpha_i^2=1,\qquad \alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0\ \ (\text{for } i\neq j)$$
$$\beta^2=m^2c^2,\qquad \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0$$

$\beta=\alpha_m mc$ と $\alpha_m^2=1$ を要求すると、上の条件はデルタ関数を用いて

$$\alpha_a\alpha_b+\alpha_b\alpha_a=2\delta_{ab}\quad(a,b=1,2,3,m) \tag{8}$$

のように一つにまとめて書ける。(7) の両辺に左から $\left\{p_0+\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3+\beta\right\}$ を掛けると、

$$\left\{p_0^2-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2p_i^2-\sum_{i,j=1,i\neq j}^{3}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_ip_j-\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_i-\beta^2\right\}\psi=0$$

となり、(8) の関係式を用いると (6) 式と同じになることがわかる。従って (7) 式は、特殊相対論から要求されるエネルギーと運動量の関係式を考慮していることになる。

次節に移る前に、α の表示について触れておく。

$$\alpha_1=\rho_1\sigma_1,\qquad \alpha_2=\rho_1\sigma_2,\qquad \alpha_3=\rho_1\sigma_3,\qquad \alpha_m=\rho_3 \tag{9}$$

ととると、(8) の関係を満たすことがわかる。ここで、ρ_3 と σ_3 が対角行列になる表示を取ると

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。これらの行列を波動関数に掛けることができるようにするには、4 つの行と列に対応して波動関数にも 4 つの値を取り得るような変数が含まれていなければならない。逆に、波動関数が 4 つの成分を持つと考えて良い。

(9) を用いると、(7) は

$$\{p_0 - \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) - \rho_3 mc\}\psi = 0 \tag{10}$$

電磁場が存在する場合は、4 元電磁ポテンシャル

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = \left(\frac{1}{c}\phi, -\boldsymbol{A}\right)$$

を用いて

$$\left\{p_0 + \frac{e}{c}A_0 - \rho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - \rho_3 mc\right\}\psi = 0 \tag{11}$$

のように一般化される[12]。この式が、Dirac 方程式と今日呼ばれるものである。(11) 式の共役虚は

$$\bar{\psi}^\dagger\left\{p_0 + \frac{e}{c}A_0 - \rho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - \rho_3 mc\right\} = 0 \tag{12}$$

となる。

68　ローレンツ変換の際の不変性

本節では、上述の Dirac 方程式（式 (11)）が特殊相対性原理を満たすこと、すなわち Lorentz 変換に対して不変であることを確かめる。[13]

$\alpha_0 = 1$ なる記号を導入し、Dirac 方程式を以下のように書き換える[14]。

$$\left\{\alpha^\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) - \alpha_m mc\right\}\psi = 0 \tag{13}$$

[12] 電磁場中の荷電粒子には、ローレンツ力 $\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ が作用する。このローレンツ力が働いた荷電粒子に関する運動方程式が得られるようにラグランジアン L を導入すると

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 - e\phi(x, t) + \frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$$

となる。これを用いて x_i と共役な一般化運動量を求めると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i + \frac{e}{c}A_i$$

となる。相対論においても、4 元運動量は上と同じような置き換えがなされる。

[13] 非相対論的な力学においては、Newton の運動方程式がガリレイ変換に対して不変であった。

[14] アインシュタインの和の規約を用いているため、和の記号が省略されていることに注意する。

ここで、4 つの α_μ は

$$\alpha^\mu \alpha_m \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha_m \alpha^\mu = 2g^{\mu\nu}\alpha_m \tag{14}$$

を満たす。このことは、μ と ν が共に 0 の場合、その一方が 0 の場合、または両方が 0 でない場合に分けて確かめることができる。

続いて、Dirac 方程式を Lorentz 変換することを試みる。まずは、運動量 p に関する無限小 Lorentz 変換を考える。

$$p_\mu^* = p_\mu + a_\mu{}^\nu p_\nu \tag{15}$$

ここで、p^* は新しい Lorentz 系における運動量を表し、$a_\mu{}^\nu$ は 1 次の微小量（つまり a に関する 2 次以上の項は 0 とみなされる）である。上式の両辺に $g^{k\mu}$ を掛けると、

$$g^{k\mu}p_\mu^* = g^{k\mu}p_\mu + g^{k\mu}a_\mu{}^\nu p_\nu$$

となり、字上げを行うと、

$$p^{*k} = p^k + a^{k\nu}p_\nu$$

となる。添字 k を μ に取り直すことで

$$p^{*\mu} = p^\mu + a^{\mu\nu}p_\nu \tag{15'}$$

を得る。ローレンツ変換に対しては、以下の量は不変である。

$$p_\mu^* p^{\mu *} = p_\mu p^\mu$$

これに (15) と (15') を代入すると、

$$(p_\mu + a_\mu{}^\nu p_\nu)(p^\mu + a^{\mu\nu}p_\nu) = p_\mu p^\mu$$

a について 2 次の項は無視し、整理することで

$$\begin{aligned}
&p_\mu a^{\mu\nu}p_\nu + a_\mu{}^\nu p_\nu p^\mu = 0 \\
\Leftrightarrow &p_\mu a^{\mu\nu}p_\nu + a_\mu{}^\nu p_\nu g^{\mu k}p_k = 0 \\
\Leftrightarrow &a^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + a^{k\nu}p_\nu p_k = 0 \\
\Leftrightarrow &a^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + a^{\nu\mu}p_\mu p_\nu = 0
\end{aligned}$$

これより、

$$a^{\mu\nu} + a^{\nu\mu} = 0 \tag{16}$$

のように、a が反対称であることがわかった。

ここで、Lorentz 変換の式 (15) を

$$p_\mu = p_\mu^* - a_\mu{}^\nu p_\nu = p_\mu^* - a_\mu{}^\nu(p_\nu^* - a_\nu{}^k p_k) = p_\mu^* - a_\mu{}^\nu p_\nu^*$$

のように書き換える。2 番目の変形では逐次代入を行っており、3 番目の変形では a に関する 2 次の項を落としている。A_μ についても同様に

$$A_\mu = A_\mu^* - a_\mu{}^\nu A_\nu^*$$

のように変換し、これらを (13) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\left\{\alpha^\mu\left(p^*_\mu - a_\mu{}^\nu p^*_\nu + \frac{e}{c}A^*_\mu - \frac{e}{c}a_\mu{}^\nu A^*_\nu\right) - \alpha_m mc\right\}\psi = 0\\
\Leftrightarrow&\left\{\alpha^\mu\left(p^*_\mu + \frac{e}{c}A^*_\mu\right) - \alpha^\mu a_\mu{}^\nu\left(p^*_\nu + \frac{e}{c}A^*_\nu\right) - \alpha_m mc\right\}\psi = 0\\
\Leftrightarrow&\left\{\alpha^\mu\left(p^*_\mu + \frac{e}{c}A^*_\mu\right) - \alpha^\lambda a_\lambda{}^\mu\left(p^*_\mu + \frac{e}{c}A^*_\mu\right) - \alpha_m mc\right\}\psi = 0\\
\Leftrightarrow&\left\{\left(\alpha^\mu - \alpha^\lambda a_\lambda{}^\mu\right)\left(p^*_\mu + \frac{e}{c}A^*_\mu\right) - \alpha_m mc\right\}\psi = 0 \qquad (17)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$M \equiv \frac{1}{4}a_{\rho\sigma}\alpha^\rho\alpha_m\alpha^\sigma \qquad (18)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}
\alpha^\mu\alpha_m M - M\alpha_m\alpha^\mu &= \frac{1}{4}a_{\rho\sigma}(\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\rho\alpha_m\alpha^\sigma - \alpha^\rho\alpha_m\alpha^\sigma\alpha_m\alpha^\mu)\\
&= \frac{1}{4}a_{\rho\sigma}(\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\rho\alpha_m\alpha^\sigma + \alpha^\rho\alpha_m\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\sigma - \alpha^\rho\alpha_m\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\sigma - \alpha^\rho\alpha_m\alpha^\sigma\alpha_m\alpha^\mu)\\
&= \frac{1}{4}a_{\rho\sigma}\{(\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\rho + \alpha^\rho\alpha_m\alpha^\mu)\alpha_m\alpha^\sigma - \alpha^\rho\alpha_m(\alpha^\mu\alpha_m\alpha^\sigma + \alpha^\sigma\alpha_m\alpha^\mu)\}\\
&= \frac{1}{4}a_{\rho\sigma}(2g^{\mu\rho}\alpha_m\alpha_m\alpha^\sigma - \alpha^\rho\alpha_m 2g^{\mu\sigma}\alpha_m) \qquad \text{((14) を用いた)}\\
&= \frac{1}{2}a_{\rho\sigma}(g^{\mu\rho}\alpha^\sigma - \alpha^\rho g^{\mu\sigma})\\
&= \frac{1}{2}(a^\mu{}_\sigma\alpha^\sigma - a_\rho{}^\mu\alpha^\rho)\\
&= \frac{1}{2}(a^\mu{}_\rho\alpha^\rho - a_\rho{}^\mu\alpha^\rho)\\
&= -a_\rho{}^\mu\alpha^\rho
\end{aligned}$$

最後の変形では、(16) 式で表される a の反対称性を用いた[15]。上の式をさらに書き換えると、

$$\alpha^\mu(1 + \alpha_m M) = (1 + M\alpha_m)(\alpha^\mu - a_\rho{}^\mu\alpha^\rho) \qquad (19)$$

が得られる。上式の右辺を展開すると、$-M\alpha_m a_\rho{}^\mu\alpha^\rho$ の項が突然現れていることに気づくだろう。しかし M の定義を思い出すと、この項は微小量 a に関して 2 次であるので、上式のように加えても問題ない、ということかと思われる。

(17) 式の両辺に左から $(1 + M\alpha_m)$ を掛け、(19) を用いると、

$$\left\{\alpha^\mu\left(1 + \alpha_m M\right)\left(p^*_\mu + \frac{e}{c}A^*_\mu\right) - \left(\alpha_m + M\right)mc\right\}\psi = 0$$

が得られる。そこで、

$$(1 + \alpha_m M)\psi = \psi^* \qquad (20)$$

とおけば、両辺に左から α_m を掛けることで

$$\begin{aligned}
&\alpha_m(1 + \alpha_m M)\psi = \alpha_m\psi^*\\
\Leftrightarrow&(\alpha_m + M)\psi = \alpha_m\psi^*
\end{aligned}$$

[15] (16) 式について一方の添字に関して字下げを行う（つまり $g_{k\nu}$ を (16) の両辺に掛ける）と、

$$a^\mu{}_k + a_k{}^\mu = 0$$

となるので、このように字下げを行った場合でも反対称性が保持されていることがわかる。

となることと、α と p は交換する（A とは交換するのか？）ことを踏まえると

$$\left\{\alpha^\mu\left(p_\mu^* + \frac{e}{c}A_\mu^*\right) - \alpha_m mc\right\}\psi^* = 0 \tag{21}$$

が得られる。これは、星のついた変数について (13) の Dirac 方程式と同じ形である。波動関数 ψ が (20) で与えられる変換を受けるものとすれば、(13) の Dirac 方程式が Lorentz 変換に対して不変であることを示している。有限の Lorentz 変換は無限小の Lorentz 変換から作り上げられる（つまり無限小の Lorentz 変換を連続して行う）から、有限の Lorentz 変換に対しても (13) の Dirac 方程式は不変である。

ここで、$\bar{\psi}^\dagger\psi$ が元の系について確率密度を与え、$\bar{\psi}^{*\dagger}\psi^*$ が新しい系についての確率密度を与えるか（つまり確率解釈ができるか）を確かめる。

(20) の共役虚は

$$\bar{\psi}^{*\dagger} = \bar{\psi}^\dagger(1 - M\alpha_m)$$

となる[16]。よって (19) を用いると

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^{*\dagger}\alpha^\mu\psi^* &= \bar{\psi}^\dagger(1 - M\alpha_m)\alpha^\mu(1 + \alpha_m M)\psi \\
&= \bar{\psi}^\dagger(1 - M\alpha_m)(1 + M\alpha_m)(\alpha^\mu - a_\nu{}^\mu\alpha^\nu)\psi \\
&= \bar{\psi}^\dagger(\alpha^\mu - a_\nu{}^\mu\alpha^\nu)\psi \\
&= \bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\psi + a^\mu{}_\nu\bar{\psi}^\dagger\alpha^\nu\psi
\end{aligned}$$

最後の変形は a の反対称性を用いた。これは (15') と同じ形をしており、$\bar{\psi}^\dagger\alpha_\mu\psi$ と $\bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\psi$ が Lorentz 変換のもとで (15)、(15') それぞれと同じ変換性を持つことを示している。

次の確率密度 ρ と確率の流れ $\boldsymbol{j}$ を 4 元ベクトルとしてひとまとめにしたもの

$$j_\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) = (c\bar{\psi}^\dagger\alpha_0\psi, c\bar{\psi}^\dagger\alpha_1\psi, c\bar{\psi}^\dagger\alpha_2\psi, c\bar{\psi}^\dagger\alpha_3\psi)$$

を導入し、連続の方程式 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ を満たすことを確かめる。4 元微分を用いると、連続の方程式は

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\psi}^\dagger\alpha_\mu\psi) = 0$$

のように表せる[17]。これを Dirac 方程式を用いて証明する。(13) に左から $\bar{\psi}^\dagger$ を掛けると

$$\bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c}A_\mu\psi\right) - \bar{\psi}^\dagger\alpha_m mc\psi = 0$$

となり、その共役虚をとると

$$\left(-i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}^\dagger}{\partial x^\mu} + \bar{\psi}^\dagger\frac{e}{c}A_\mu\right)\alpha^\mu\psi - \bar{\psi}^\dagger\alpha_m mc\psi = 0$$

であるが、両辺の差をとり $i\hbar$ で割ると

$$\bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\bar{\psi}^\dagger}{\partial x^\mu}\alpha^\mu\psi = 0$$

となる。左辺を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\psi) = 0$$

となり、連続の方程式が成り立つことが確認された。$\bar{\psi}^{*\dagger}\alpha^{*\mu}\psi$ は $\bar{\psi}^\dagger\alpha^\mu\psi$ と Lorentz 変換によって結ばれるので特殊相対性原理より、新しい系における確率密度と確率の流れ $\bar{\psi}^{*\dagger}\alpha^{*\mu}\psi$ も連続の方程式を満たす。

---

[16] M は純虚数である。

[17]

$$\partial^\mu j_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu j_\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}$$

69　1 個の自由な電子の運動

本節では、自由な電子の運動に関するハイゼンベルクの運動の方程式を調べる。ハイゼンベルク表示の演算子には、本書にならい添字 t を記す。

(10) 式と $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ を満たすハミルトン関数は

$$H = c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) + \rho_3 mc^2 = c(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{p}) + \rho_3 mc^2 \tag{23}$$

である。運動量の時間変化をハイゼンベルクの運動の方程式を用いて計算すると

$$\dot{p_{1t}} = [p_{1t}, H] = 0$$

となるので、p は運動の定数（つまり保存量）であることがわかる。

速度の x_1 成分は

$$\dot{x_{1t}} = [x_{1t}, H] = c[x_{1t}, \alpha_{1t}p_{1t}] = c[x_{1t}, \alpha_{1t}]p_{1t} + c\alpha_{1t}[x_{1t}, p_{1t}] = c\alpha_{1t}[x_{1t}, p_{1t}] = c\alpha_{1t} \tag{24}$$

となる[18]。上で得られた運動量と速度の関係は、古典論のものとは異なったものである。古典論において運動量と速度は、自由粒子のハミルトニアン $H = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2}$ と正準方程式を用いて

$$\dot{x_1} = \frac{dH}{dp_1} = \frac{c^2 p_1}{H}$$

のように関係づけられるのであったことを思い出そう。

次に、電子の速度が時間とともにどう変わるかについて調べる。

$$\dot{\alpha_{1t}} = [\alpha_{1t}, H] = \frac{1}{i\hbar}(\alpha_{1t}H - H\alpha_{1t}) = \frac{1}{i\hbar}\Big(\alpha_{1t}H - \{\alpha_{1t}H + H\alpha_{1t}\} + \alpha_{1t}H\Big)$$

α_1 は H の中で $c\alpha_{1t}p_{1t}$ を除いた全ての項と互いに反交換するため、

$$\alpha_{1t}H + H\alpha_{1t} = \alpha_{1t}c\alpha_{1t}p_{1t} + c\alpha_{1t}p_{1t}\alpha_{1t} = 2cp_{1t}$$

である。よって

$$i\hbar\dot{\alpha_{1t}} = 2\alpha_{1t}H - 2cp_{1t} = -2H\alpha_{1t} + 2cp_{1t} \tag{25}$$

となる。H と p_1 は運動の定数（保存量、つまり時間に依存しない）であるので、

$$i\hbar\ddot{\alpha_{1t}} = 2\dot{\alpha_{1t}}H \tag{26}$$

が得られる。これを積分すると $t = 0$ のときの $\dot{\alpha_1}$ を $\dot{\alpha_1^0}$ と表すことにし、演算子の指数関数の定義を用いると、上式は

$$\int_0^t \frac{d}{dt'}\Big(\frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big)dt' = -\frac{2i}{\hbar}\int_0^t \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}H dt'$$

[18] 本書における交換関係の定義は

$$uv - vu = i\hbar[u, v]$$

である。座標 q と運動量 p の間には $qp - pq = i\hbar$ の関係があったので、

$$[q, p] = 1$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=t} &= \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0} - \frac{2i}{\hbar}\int_0^t \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}Hdt' \\ &= \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0} - \frac{2i}{\hbar}\int_0^t \Big(\frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0} - \frac{2i}{\hbar}\int_0^{t'} \frac{d\alpha_{1t''}}{dt''}Hdt''\Big)Hdt' \\ &= \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0} + \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0}\Big(-\frac{2i}{\hbar}Ht\Big) + \Big(-\frac{2i}{\hbar}Ht\Big)^2\int_0^t\int_0^{t'} \frac{d\alpha_{1t''}}{dt''}H^2dt''dt' \\ &= ... \\ &= \frac{d\alpha_{1t'}}{dt'}\Big|_{t'=0}\Big\{1 + \Big(-\frac{2i}{\hbar}Ht\Big) + \frac{1}{2!}\Big(-\frac{2i}{\hbar}Ht\Big)^2 + ...\Big\}\end{aligned}$$

$$\dot{\alpha_{1t}} = \dot{\alpha^0_{1t}}e^{-2iHt/\hbar} \tag{27}$$

となる。(25) の第二の式から同じようにして

$$\dot{\alpha_{1t}} = e^{2iHt/\hbar}\dot{\alpha^0_{1t}}$$

が得られる。ここで、(25) の第一の式と (27) を用いると

$$\alpha_{1t} = \frac{1}{2}i\hbar\dot{\alpha^0_{1t}}e^{-2iHt/\hbar}H^{-1} + cp_{1t}H^{-1} \tag{28}$$

となり、(24) から

$$\dot{x_{1t}} = c\alpha_{1t} = \frac{1}{2}ic\hbar\dot{\alpha^0_{1t}}e^{-2iHt/\hbar}H^{-1} + c^2p_{1t}H^{-1}$$

となることから、$\dot{x_{1t}}$ の時間積分は

$$x_{1t} = -\frac{1}{4}c\hbar^2\dot{\alpha^0_{1t}}e^{-2iHt/\hbar}H^{-2} + c^2p_{1t}H^{-1}t + a_1 \tag{29}$$

となる。ただし a_1 は定数である。

速度 $\dot{x_{1t}}$ は二つの部分からできあがっている。その一つは $c^2p_{1t}H^{-1}$ という一定の部分であって、運動量との関係が古典論の相対論的な公式で与えられる部分である（69 節の最初の議論を参照）。もう一つは振動する部分 $2^{-1}ic\hbar\dot{\alpha^0_{1t}}e^{-2iHt/\hbar}H^{-1}$ であり、この (角) 振動数は $2H/h$ であるから少なくとも $2mc^2/h$ であり、これは大きな値である。実際の測定では $h/2mc^2$ よりもずっと長い時間に渡って平均の速度が得られるので、測定にのるのは第一の部分の $c^2p_{1t}H^{-1}$ のみである。

70　スピンの存在

電磁場中の場合において、(6) の Klein-Gordon 方程式は以下のようなものであることが望ましい。

$$\Big\{\Big(p_0 + \frac{e}{c}A_0\Big)^2 - \Big(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 - m^2c^2\Big\}\psi = 0 \tag{30}$$

今、(11) の Dirac 方程式の左辺に何かを掛けて (30) になるべく似た形にすることを考える。(11) の両辺に左から

$$p_0 + \frac{e}{c}A_0 + \rho_1\Big(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big) + \rho_3 mc$$

を掛け、$\rho_1\rho_3 = -\rho_3\rho_1$ に注意すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\Big\{\Big(p_0 + \frac{e}{c}A_0\Big)^2 - \Big(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 - m^2c^2 - \rho_1\Big[\Big(p_0 + \frac{e}{c}A_0\Big)\Big(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big) \\ - \Big(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\Big(p_0 + \frac{e}{c}A_0\Big)\Big]\Big\}\psi = 0\end{aligned} \tag{31}$$

上式を整理するために、$\boldsymbol{B}$ 及び $\boldsymbol{C}$ をパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ と互いに交換する任意の 3 次元ベクトルとして、以下の関係式を利用する[19]。

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) + i(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{32}$$

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{p}+\dfrac{e}{c}\boldsymbol{A}$ ととると、

$$\Big(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 = \Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 + i\Big(\boldsymbol{\sigma},\Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\times\Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\Big)$$

2 項目の中に現れた外積が関数に作用したときの結果を計算する[20]。

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\times\Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\Big\}\psi = \frac{e}{c}\Big\{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p})\Big\}\psi = -i\frac{\hbar e}{c}\Big\{(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla})\Big\}\psi\\
&= -i\frac{\hbar e}{c}\Big(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\psi)+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}\psi\Big) = -i\frac{\hbar e}{c}\Big(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\Big)\psi = -i\frac{\hbar e}{c}\boldsymbol{\mathcal{H}}\psi
\end{aligned}$$

ここで、ベクトル解析で知られている公式

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\psi) = \Big(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\Big)\psi - \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}\psi$$

を用いた[21]。結局、

$$\Big(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 = \Big(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)^2 + \frac{\hbar e}{c}\Big(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mathcal{H}}\Big) \tag{33}$$

のようになる。また、(30) の左辺第 4 項目についても、運動量の交換関係 $p_ip_j - p_jp_i = 0$ などを用いると（$A_iA_j - A_jA_i = 0$ も成り立つか？）

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big(p_0+\frac{e}{c}A_0\Big)\Big(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big) - \Big(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\Big)\Big(p_0+\frac{e}{c}A_0\Big)\Big]\psi\\
&= \Big[\Big(p_0+\frac{e}{c}A_0\Big)\sigma_i\Big(p_i+\frac{e}{c}A_i\Big) - \sigma_i\Big(p_i+\frac{e}{c}A_i\Big)\Big(p_0+\frac{e}{c}A_0\Big)\Big]\psi\\
&= \frac{e}{c}\sigma_i\Big(p_0A_i - A_ip_0 + A_0p_i - p_iA_0\Big)\psi\\
&= i\frac{\hbar e}{c}\sigma_i\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A_i\psi) - A_i\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big) - i\frac{\hbar e}{c}\sigma_i\Big(A_0\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(A_0\psi)\Big)\\
&= i\frac{\hbar e}{c}\sigma_i\Big(\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\Big)\psi + i\frac{\hbar e}{c}\sigma_i\Big(\frac{\partial A_0}{\partial x_i}\Big)\psi\\
&= \frac{i\hbar e}{c}\Big(\boldsymbol{\sigma},\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}A_0\Big)\psi = -i\frac{\hbar e}{c}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mathcal{E}})
\end{aligned}$$

---

[19] (32) の証明を行う。ここでもアインシュタインの和の規則に従い、和の記号が現れていないことに注意する。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{C}) &= \sigma_iB_i\sigma_jC_j = \sigma_i\sigma_jB_iC_j\\
&= \Big\{\frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i) + \frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i)\Big\}B_iC_j\\
&= (\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k)B_iC_j\\
&= B_iC_i + i\sigma_k\epsilon_{ijk}B_iC_j\\
&= (\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) + i(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})
\end{aligned}$$

ここで、完全反対称記号 ϵ_{ijk} を用いた。この記号は ϵ_{ijk} 及び循環させた添字に対しては $+1$ を、ϵ_{jik} 及び循環させた添字に対しては -1 の値をとる。また、パウリ行列が満たす関係式

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

を用いた。

[20] $\boldsymbol{p}$ は微分演算子であり、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ とは必ずしもならないことに注意する（演算子が関数に作用した際にとる値を調べる必要がある)。

[21] この公式の証明も完全反対称記号を用いると以下のように簡単に示せる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\psi) &= \epsilon_{ijk}\partial_j(A_k\psi) = \epsilon_{ijk}\{(\partial_jA_k)\psi + A_k(\partial_j\psi)\}\\
&= (\epsilon_{ijk}\partial_jA_k)\psi - \epsilon_{ikj}A_k\partial_j\psi = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi - \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}\psi
\end{aligned}$$

となる。ここで、電場 $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} A_0$ を導入した。以上より、

$$\left\{\left(p_0 + \frac{e}{c}A_0\right)^2 - \left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - m^2c^2 - \frac{\hbar e}{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mathcal{H}}) + i\rho_1 \frac{\hbar e}{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mathcal{E}})\right\}\psi = 0 \tag{34}$$

となる。

Dirac 方程式から導かれた (34) は、Klein-Gordon 方程式を拡張した (30) と比べて、最後の二つの余分な項がある点で異なる。この違いによってどのような物理的な特徴が現れるかを調べる。そのために、ハイゼンベルク流の見方をしてみる。(23) を電磁場のある場合に一般化したハミルトン関数は

$$H = -eA_0 + c\rho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \rho_3 mc^2 \tag{35}$$

である。(33) の助けを借りながら、これをさらに変形すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{H}{c} + \frac{e}{c}A_0\right)^2 &= \left\{\rho_1\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) + \rho_3 mc\right\}^2 \\ &= \left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + m^2c^2 \\ &= \left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{c}\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mathcal{H}}\right) + m^2c^2\end{aligned} \tag{36}$$

遅く動いている電子に対しては、ハイゼンベルグの運動の方程式は $mc^2 + H_1$ という形のハミルトン関数で与えられると期待して良い[22]。ただし H_1 は mc^2 に比べて非常に小さい量である。(36) の H に $mc^2 + H_1$ を代入して、一次近似を行うと、

$$\left(\frac{H}{c} + \frac{e}{c}A_0\right)^2 = \left(\frac{H_1}{c} + mc + \frac{e}{c}A_0\right)^2 = m^2c^2\left(1 + \frac{H_1}{mc^2} + \frac{eA_0}{mc^2}\right)^2 \approx m^2c^2\left(1 + \frac{2H_1}{mc^2} + \frac{2eA_0}{mc^2}\right)$$

となるので、(36) より

$$H_1 + eA_0 = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{2mc}\left(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mathcal{H}}\right) \tag{37}$$

が得られる。第一項はおそい電子に対する古典論のハミルトニアンと同じである。一方で最後の項は量子論でおそい電子が持つ余分のポテンシャルエネルギーと考えてよく、従って電子が $-\hbar e/2mc \cdot \boldsymbol{\sigma}$ だけの磁気能率を持つことから生じると解釈してよい。

ここで、(35) で $\boldsymbol{A} = 0$（つまり外場として作用する磁場が 0）とし、A_0 を動径 r の関数（中心力の電場中を考える）としたハミルトニアン

$$H = -eA_0(r) + c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}) + \rho_3 mc^2 \tag{38}$$

を考える。軌道の角運動量の x_1 成分の変化の割合を求めると、交換関係

$$m_i p_j - p_j m_i = i\hbar[m_i, p_j] = i\hbar[\epsilon_{ijk} x_j p_k, p_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}[x_j, p_j]p_k = i\hbar\epsilon_{ijk}p_k$$

の助けを借りると、次のようになる。

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{m}_{1t} &= m_{1t}H - Hm_{1t} \\ &= c\rho_1\{m_{1t}(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{p}_t) - (\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{p}_t)m_{1t}\} \\ &= c\rho_1(\boldsymbol{\sigma}_t, m_{1t}\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{p}_t m_{1t})\} \\ &= i\hbar c\rho_1\{\sigma_{2t}p_{3t} - \sigma_{3t}p_{2t}\}\end{aligned}$$

[22]本稿 66 節の注釈で触れた静止エネルギーの導入の計算を思い出そう。Taylor 展開時に速度 $\boldsymbol{v}$ が光速に比べて十分小さいという近似の元で計算した結果、静止エネルギーと運動エネルギーが切り分けられたのだった。

従って、$\dot{m_{1t}} \neq 0$ であり、（中心力の力場中であるにも関わらず）軌道の角運動量は保存量ではないことがわかる。この結果は (29) からも予期されるものである。すなわち、電子の運動に振動する部分があることが明らかにされたが、その振動する部分によって角運動量に振動する項が生ずるのである。

さらにまた、

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\sigma_{1t}} &= \sigma_{1t}H - H\sigma_{1t} \\ &= c\rho_1\{\sigma_{1t}(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{p}_t) - (\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{p}_t)\sigma_{1t}\} \\ &= c\rho_1(\sigma_{1t}\boldsymbol{\sigma}_t - \boldsymbol{\sigma}_t\sigma_{1t}, \boldsymbol{p}_t) \\ &= 2ic\rho_1\{\sigma_{3t}p_{2t} - \sigma_{2t}p_{3t}\} \end{aligned}$$

となる。ここで、パウリ行列が満たす関係式

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

を用いた。以上より、

$$\dot{m_{1t}} + \frac{1}{2}\hbar\dot{\sigma_{1t}} = 0$$

となり、$\boldsymbol{m} + 1/2 \cdot \hbar\boldsymbol{\sigma}$ が保存量であることがわかる。この結果を解釈して次のようにいうことができる。電子はスピンの角運動量 $1/2 \cdot \hbar\boldsymbol{\sigma}$ を持っており、保存量を求めるには軌道の角運動量に加えてこのスピンの角運動量を加えておかなければならない。

以上のように、特殊相対論と整合する量子力学から、電子のスピンの値が $\dfrac{1}{2}\hbar$ であることが導かれた。

71　極座標に移ること

72　水素のエネルギー準位の微細構造

73　陽電子の理論